Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

С.А. Козлова, А.Г. Рубин

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК • 6 класс • Часть 1

БАЛАСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

С.А. Козлова, А.Г. Рубин

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК • 6 класс • Часть 1

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва
БАЛАСС
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я721
К59

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

Совет координаторов предметных линий Образовательной системы «Школа 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (от 14.10.2011) № 10106-5215/610 и Российской академии образования (от 24.10.2011) № 01-5/7д-78

Руководитель издательской программы – доктор пед. наук, проф., член-корр. РАО *Р.Н. Бунеев*

Козлова, С.А.
К59 **Математика. 6 кл.** : учеб. для общеобразоват. учреждений : в 2-х частях. Ч. 1 / С.А. Козлова, А.Г. Рубин. – 2-е изд. – М. : Баласс, 2013. – 208 с., ил. (Образовательная система «Школа 2100»)

ISBN 978-5-85939-876-8 (ч. 1)
ISBN 978-5-85939-983-3

Учебник предназначен для учащихся 6-го класса общеобразовательных учреждений, соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Учебник ориентирован на развитие мышления, творческих способностей ребёнка, его интереса к математике, функциональной грамотности, вычислительных навыков. В нём рассматриваются элементы стохастики и способы решения некоторых занимательных и нестандартных задач.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-85939-876-8 (ч. 1)
ISBN 978-5-85939-983-3

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Вы продолжаете изучать предмет «Математика». Учебник Образовательной системы «Школа 2100» поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

- организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;
- работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;
- общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать.

Так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Зачем мы будем учиться?

Изучая математику в 6-м классе, вы освоите новый вид дробей – десятичные дроби, научитесь выполнять арифметические действия с ними; будете решать задачи на пропорции и проценты; познакомитесь с подобием геометрических фигур; более глубоко поработаете с понятием масштаба; изучите отрицательные числа, научитесь выполнять арифметические действия с ними. Вы получите первоначальное представление о действительных числах, научитесь решать более сложные задачи на перебор возможных вариантов и вычисление вероятностей, познакомитесь с новым геометрическим материалом: центральной и осевой симметрией, многогранниками, их развёртками и сечениями, задачами на разрезание и составление фигур.

Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто нужно иметь дело с числами и фигурами!

Задания на развитие предметных умений обозначены в учебнике серым цветом.

Как мы будем учиться?

Для успешного изучения математики и овладения универсальными умениями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Структура параграфа, где вводится новый материал, имеет в учебнике следующий вид.

Вспоминаем то, что знаем

Так обозначены вопросы, задания и упражнения по изученному материалу, который необходим для открытия нового знания.

Открываем новые знания

Ученики, проводя наблюдения, ищут решение и формулируют свои предположения о том, как решается данная задача, формулируют ответы на поставленные в учебнике вопросы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Ученики читают, анализируют текст учебника, сопоставляют его со своими предположениями, проверяют правильность своих ответов на вопросы и сделанных на их основании выводов.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н **Необходимый уровень.** Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Они требуют более глубокого усвоения учебного материала, для их решения, наряду с использованием уже известных вам приёмов и алгоритмов, может понадобиться создание собственных алгоритмов.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом выполнение всех содержащихся в учебнике заданий ни на каком из уровней не является обязательным! Они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

Структура параграфа, где повторяются и обобщаются знания, имеет в учебнике следующий вид.

Повторяем, обобщаем знания

Так обозначены вопросы, задания и тексты по изученному и обобщаемому материалу.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности, о которых сказано выше.

Ориентироваться в учебнике тебе помогут условные обозначения

 Проблемный вопрос.

 Это нужно прочитать и использовать полученную информацию в дальнейшей работе.

 Работа в группе (паре).

 Задания для домашней работы.

 Задания с использованием информационных технологий.

 Самостоятельная исследовательская работа.

Жизненные задачи и проекты

Помимо обычных учебных заданий разного уровня сложности, в учебник включены жизненные задачи и проекты. Ими можно заниматься в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Что такое жизненная задача?

Жизненная задача – это модель реальной ситуации, для разрешения которой необходим набор математических знаний, к этому моменту вам уже в основном известных. При этом жизненная задача отличается от привычных всем школьных учебных задач. Это отличие, прежде всего, заключается в том, что для её решения вам может понадобиться дополнительная информация, которую придётся добывать самим, причём, какая именно информация нужна, вы должны решать сами и самостоятельно искать источники этой информации. В случае затруднений вы можете обратиться к старшим товарищам, учителю или другим взрослым.

В условии жизненной задачи также могут содержаться избыточные данные. Ведь в жизни чаще всего так и бывает: когда пытаешься разобраться в ситуации и анализируешь, что тебе о ней известно, то далеко не вся эта информация пригодится, значительная её часть, как постепенно выясняется в ходе анализа, не имеет отношения к делу. Кроме того, для решения жизненной задачи будут необходимы знания не только из области математики, но и других изучаемых вами областей (как это и происходит в реальной жизни). Таким образом, систематическое решение жизненных задач даст вам возможность не только углубиться в математику, увидеть взаимосвязь математики и других областей знаний, но и совершенствоваться в умении самостоятельно работать с информацией.

Жизненные задачи, как принято в учебниках Образовательной системы «Школа 2100», оформлены следующим образом.

СИТУАЦИЯ. Условия, в которых возникла проблема.

ВАША РОЛЬ. Человек, в роли которого вы должны себя представить, решая проблему.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Более подробная характеристика ситуации.
ЗАДАНИЕ. Что нужно сделать или что нужно получить в итоге.

Что такое проект?

Это любое самостоятельное дело, которое предполагает:
1. Оригинальный замысел (цель).
2. Выполнение работы за определённый отрезок времени.
3. Конкретный результат, представленный в итоге (мероприятие, решение проблемы, результат самостоятельных исследований и др.).

Проектная деятельность даст вам возможность научиться работать в команде, распределять роли таким образом, чтобы наиболее эффективно использовать сильные стороны каждого, участвовать в мозговых штурмах и других формах коллективной интеллектуальной деятельности, представлять результаты своего труда в форме доклада, презентации, инсценировки и т.д. Предполагается, что проекты будут выполняться в свободное от уроков время. Они не являются обязательными.

Что вы будете изучать и чему учиться в этом учебном году

Раздел I. Повторяются известные вам обыкновенные дроби и изучаются дроби нового вида – десятичные дроби. Изучаются новые геометрические понятия – смежные и вертикальные углы, параллельность, центральная симметрия и решаются связанные с ними задачи.

Раздел II. Изучаются очень важные в многочисленных практических применениях понятия пропорции (и связанные с ним понятия прямой и обратной пропорциональности величин, масштаба, подобия) и процента. Решаются разнообразные задачи на пропорции и проценты.

Раздел III. Изучаются новые числа – отрицательные (сначала целые отрицательные, которые вместе с натуральными числами и нулём образуют множество целых чисел, а затем отрицательные дроби, которые вместе с положительными дробями и нулём образуют множество рациональных чисел). Изучаются правила выполнения действий с целыми и рациональными числами.

Раздел IV. Даётся понятие о действительных числах, о нахождении длины отрезка и длины окружности. Рассматриваются геометрические задачи на клетчатой бумаге, на разрезание и составление фигур, а также на многогранники, их развёртки и сечения. Более глубоко, чем в пятом классе, изучаются задачи на перебор возможных вариантов и вычисление вероятностей.

Каждый раздел соответствует одной учебной четверти.

Особенности структуры учебника

В начале каждого раздела вы будете планировать свою работу (намечать путь продвижения по материалам раздела), затем в соответствии с этим планом получать необходимые вам новые знания и умения и в конце – оценивать свои достижения.

При этом мы предлагаем вам на выбор три пути разного уровня сложности.

Путь первого уровня состоит из входного теста, основных обучающих материалов и итогового теста.

Путь второго уровня состоит из входного теста, основных обучающих материалов, жизненной задачи и итогового теста.

Путь третьего уровня состоит из входного теста, основных обучающих материалов, задач для любителей математики, жизненной задачи и итогового теста.

Давайте разберём, что представляет собой каждый из этапов, входящих в перечисленные выше пути.

Каждый путь включает входной тест, основные обучающие материалы и итоговый тест – **это минимальный набор этапов**. **Этот набор входит в каждый из путей**. При этом основные обучающие материалы каждого раздела разбиты на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается некоторая тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы.

Входной тест позволяет вам определить, насколько вы готовы к работе с данным разделом (имеются ли у вас базовые знания, без которых невозможно продвижение по этому разделу). **Итоговый тест** позволяет вам определить, насколько вы овладели новым материалом, изложенным в этом разделе.

Путь второго уровня является более сложным, так как, помимо минимального набора этапов, включает также жизненную задачу. Эти задачи можно решать в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Путь третьего уровня является максимально сложным из предлагаемых, так как включает ещё один этап – **«Любителям математики»**.

Этот этап содержит задачи повышенной трудности, которые обычно предлагаются на олимпиадах, интеллектуальных марафонах, математических кружках. Для решения таких задач не нужны никакие дополнительные знания, нужна смекалка, умение найти нестандартную точку зрения на привычную ситуацию, обнаружить взаимосвязи между вещами, на первый взгляд никак между собой не связанными. Многие из этих задач очень сложные, и будьте готовы к тому, что они потребуют длительных размышлений и значительных усилий.

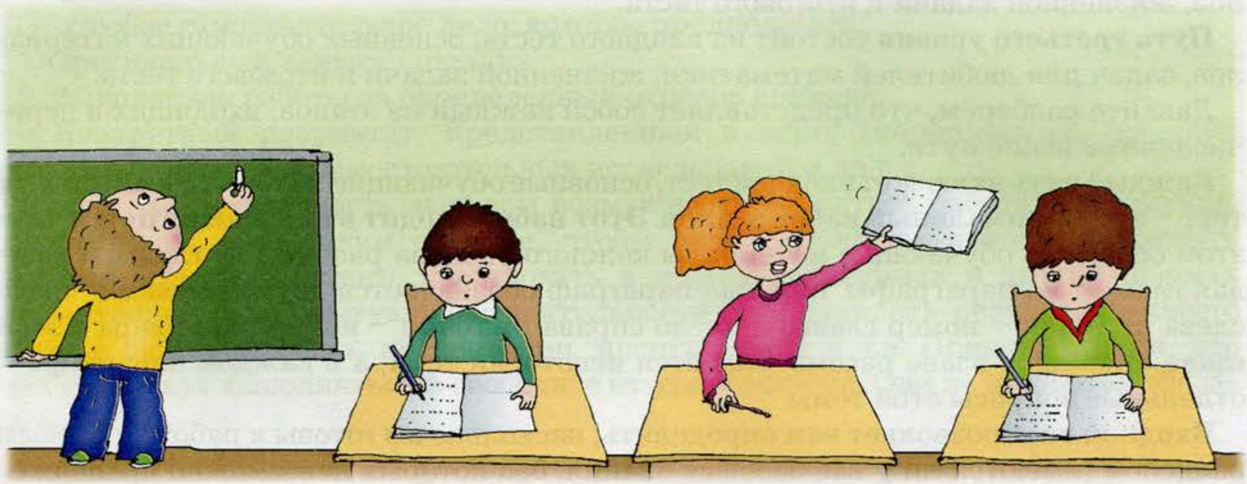
Выбрав один из путей, вы должны пройти по всем входящим в него этапам. Таким образом, ваш класс разобьётся на группы (от одной до трёх), и каждый из вас получит возможность сотрудничества внутри группы, предполагающего взаимопомощь, поддержку и совместные интеллектуальные усилия. Но в то же время у вас имеется дополнительная возможность погружения в предмет, если вы выберете работу с проектами, с историческими страницами или тем и другим.

О проектной деятельности уже сказано выше, а что касается **исторических страниц**, то они написаны для тех, кто хочет больше узнать, как люди учились решать всё более и более сложные математические задачи, как формировались с течением времени изучаемые вами понятия.

В начале каждого раздела мы поместили путеводитель, чтобы вы ясно видели все возможные пути движения и выбрали свой. Путеводитель к первому из разделов находится на страницах 10–11 этой части учебника.

РАЗДЕЛ I ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Входной тест



1 Выполните действия с дробями:

а) $\frac{13}{25} - \frac{7}{15}$; б) $2\frac{3}{11} \cdot \frac{22}{75}$; в) $\frac{18}{35} : 6\frac{3}{7}$.

1 верный результат – 1 очко

2 Выберите истинное высказывание:

а) $\frac{3}{8} > \frac{5}{8}$; б) $\frac{11}{17} < \frac{12}{17}$; в) $\frac{35}{29} > \frac{39}{29}$.

1 очко

3 Выберите истинное высказывание:

а) $\frac{13}{19} > \frac{15}{19}$; б) $\frac{39}{41} < \frac{39}{42}$; в) $\frac{44}{15} > \frac{44}{17}$.

1 очко

4 Выберите истинное высказывание:

а) $\frac{11}{24} < \frac{7}{18}$; б) $\frac{5}{16} > \frac{9}{28}$; в) $\frac{37}{15} > \frac{49}{20}$.

2 очка

5 Выберите истинное высказывание:

а) $\frac{53}{24} = 2\frac{5}{24}$; б) $\frac{101}{19} = 5\frac{8}{19}$; в) $8\frac{7}{17} = \frac{145}{17}$.

2 очка

6 Какую часть стены рабочий оклеивает обоями за 1 ч, если всю стену он оклеивает за $1\frac{1}{3}$ ч?

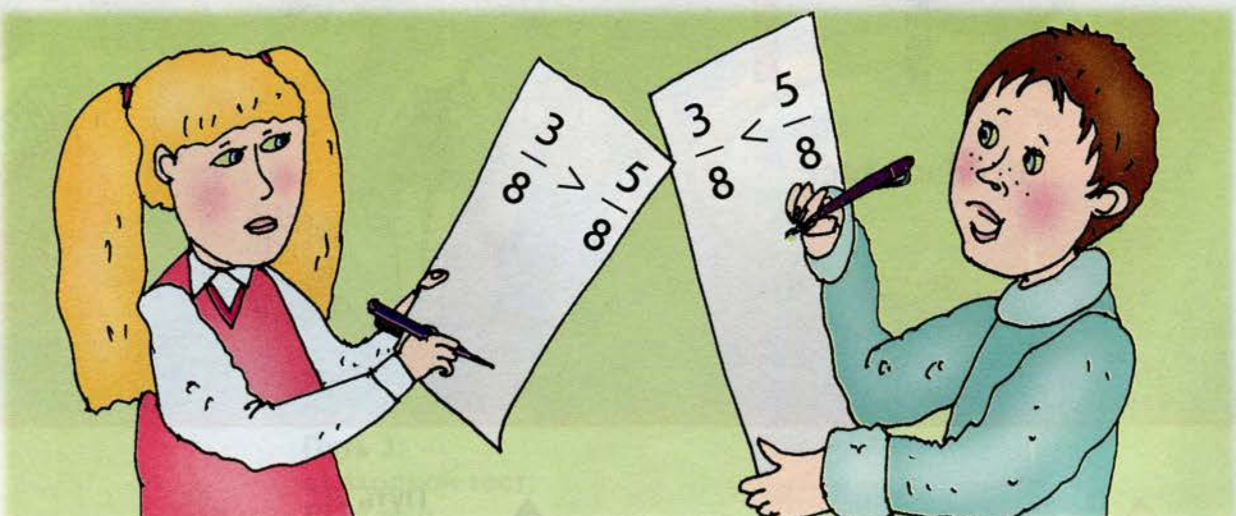
Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{5}{6}$.

2 очка

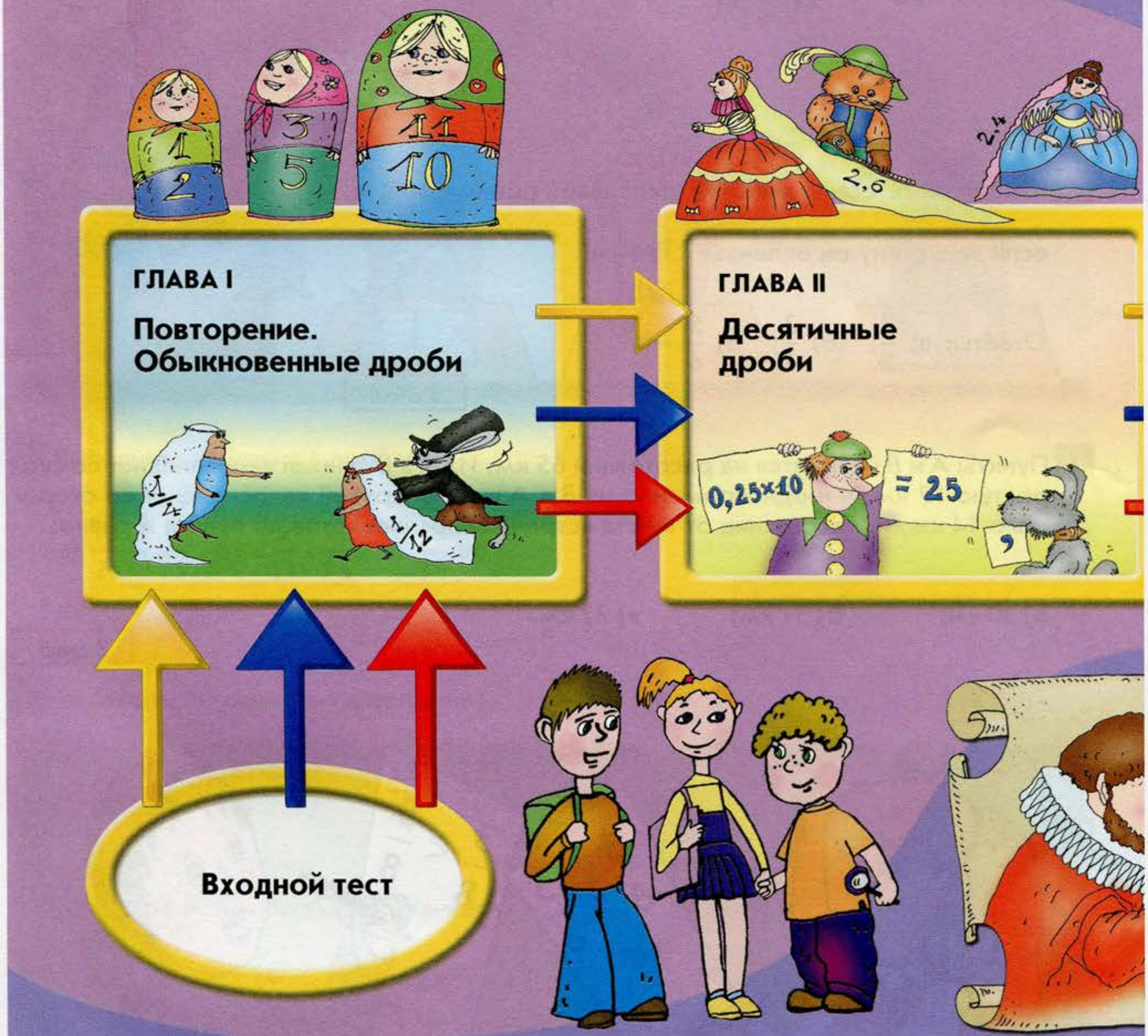
7 Пункты A и B находятся на расстоянии 65 км. Из A в B выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч и одновременно из B в A выехал другой велосипедист со скоростью 14 км/ч. Расстояние от места встречи велосипедистов до пункта A равно:

а) 30 км; б) 31 км; в) 32 км.

3 очка

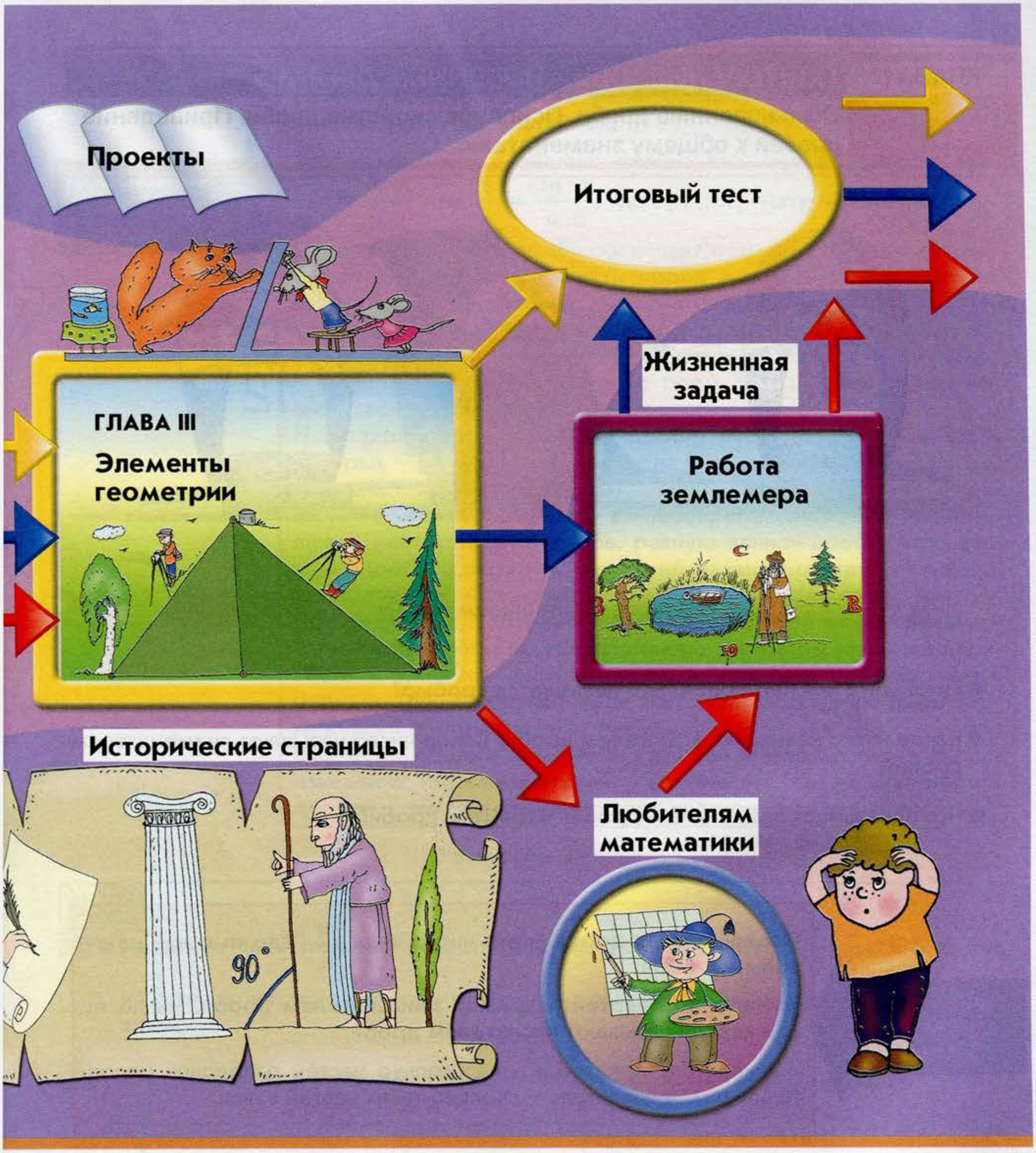


Путеводитель по первому разделу



Путь 1:
а) входной тест;
б) главы;
в) итоговый тест.

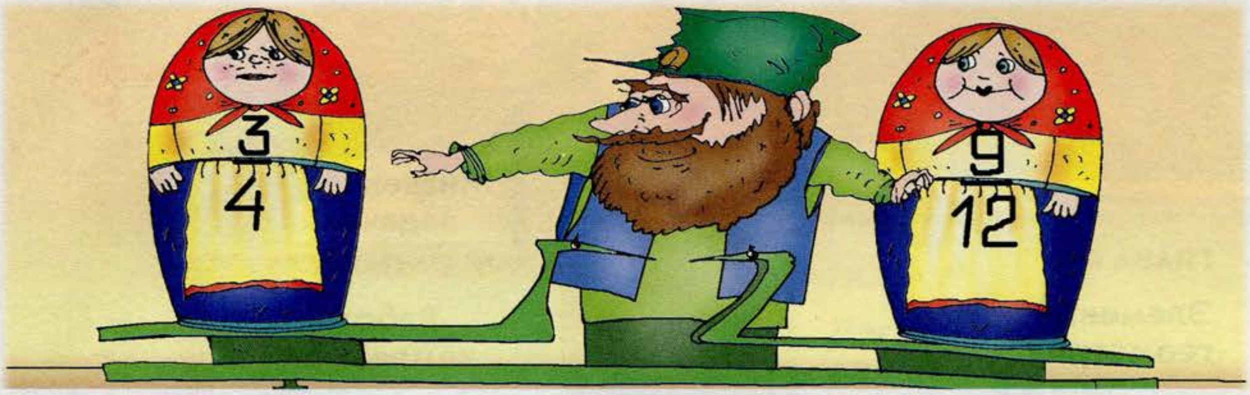
Путь 2:
а) входной тест;
б) главы;
в) жизненная задача;
г) итоговый тест.



Путь 3:

а) входной тест;
б) главы;
в) задачи для любителей математики;
г) жизненная задача;
д) итоговый тест.

ГЛАВА I	ПОВТОРЕНИЕ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ
1.1	Обыкновенные дроби. Основное свойство дроби. Приведение дробей к общему знаменателю



Повторяем, обобщаем знания

- Приведите пример дроби. Что называется дробью?
- Какое число называют числителем дроби? Какое число называют знаменателем дроби?
- Что показывает знаменатель дроби? Числитель дроби?

Дробь
Числитель
Знаменатель

Обыкновенная дробь – это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа.

Число n **под** чертой называют **знаменателем дроби.** Число m **над** чертой называют **числителем** дроби.

Знаменатель показывает, на сколько частей разделили целое (единицу), а числитель – сколько таких частей взяли.

- Какое свойство дроби называют основным?
- Какие преобразования дробей вы умеете делать, используя это свойство?

Основное свойство дроби

Если и числитель, и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

Это – *основное свойство дроби*. Его можно записать так: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}$ или $\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}$, где a, m, n – натуральные числа.

Основное свойство дроби позволяет *приводить дробь к новому знаменателю*. Привести дробь к знаменателю a значит найти равную ей дробь со знаменателем a.

Основное свойство позволяет *сокращать* дроби, поделив одновременно и числитель, и знаменатель на одно и то же число. В качестве этого числа можно брать любой общий делитель числителя и знаменателя.

Несократимыми называют дроби, числитель и знаменатель которых – взаимно простые числа (т.е. не имеющие общих делителей, кроме единицы). Для каждой дроби существует единственная равная ей несократимая дробь. Чтобы получить несократимую дробь, равную данной дроби, надо данную дробь сократить на *наибольший общий делитель числителя и знаменателя*.

При сравнении, сложении и вычитании дробей их, как правило, *приводят к общему знаменателю*. При этом их можно привести к *любому знаменателю, кратному знаменателям данных дробей*, однако чаще всего стараются подобрать *наименьший общий знаменатель*.

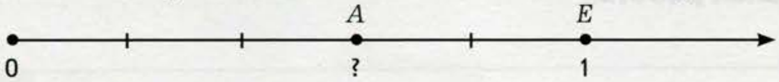
В качестве общего знаменателя дробей всегда можно взять произведение их знаменателей. Наименьший общий знаменатель дробей – это наименьшее общее кратное их знаменателей.

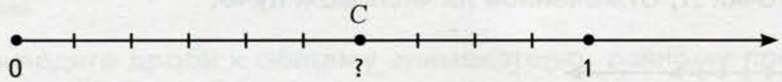
Развиваем умения

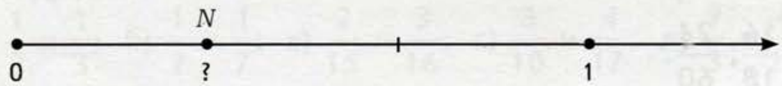
Н

1 Назовите числитель и знаменатель каждой дроби: $\frac{3}{11}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{5}$. Объясните, на сколько частей в каждом из этих случаев разделили целое и сколько частей взяли.

2 На числовом луче отмечены точки. Запишите координаты точек A, C, N.

а) 

б) 

в) 

3 Сформулируйте основное свойство дроби. Приведите примеры.

4 С помощью основного свойства дроби докажите, что:

а) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; б) $\frac{2}{3}=\frac{30}{45}$; в) $\frac{7}{12}=\frac{28}{48}$; г) $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$; д) $\frac{25}{49}=\frac{75}{147}$.

5 а) Любые ли две дроби можно привести к общему знаменателю?
б) К какому общему знаменателю удобней всего приводить дроби?
в) Любую ли дробь можно сократить?
г) Как сократить дробь, числитель и знаменатель которой не являются взаимно простыми числами?

6 Приведите дроби: а) $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{12}$ к знаменателю 36; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{15}$ к знаменателю 45; в) $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{19}{30}$ к знаменателю 90.

7 Можно ли привести дробь $\frac{2}{5}$ к знаменателю:
а) 10; б) 7; в) 35; г) 24?

8 Запишите числитель и знаменатель каждой дроби в виде произведений, содержащих одинаковые множители, и сократите дробь:

а) $\frac{3}{6}$; б) $\frac{12}{15}$; в) $\frac{36}{48}$; г) $\frac{10}{15}$; д) $\frac{45}{54}$.

9 Определите, сократима ли дробь:

а) $\frac{3}{6}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{4}{11}$; г) $\frac{5}{15}$; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{8}{12}$; ж) $\frac{11}{15}$.

10 Запишите в виде несократимой дроби:

а) $\frac{20}{100}$; б) $\frac{49}{63}$; в) $\frac{60}{75}$; г) $\frac{450}{1000}$; д) $\frac{700}{900}$; е) $\frac{130}{360}$.

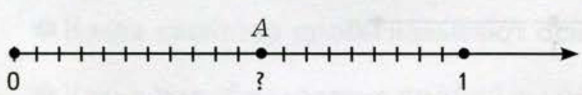
11 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{15}$; в) $\frac{3}{9}$ и $\frac{4}{11}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Запишите координату точки A, отмеченной на числовом луче.



б) Сократите дроби: $\frac{12}{24}$; $\frac{16}{18}$; $\frac{24}{60}$.

в) Приведите дроби к общему знаменателю: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{5}$ и $\frac{7}{15}$; $\frac{5}{9}$ и $\frac{1}{6}$.

П **Вариант II**

а) Начертите единичный отрезок и отметьте на нём точки $A\left(\frac{1}{7}\right)$ и $B\left(\frac{7}{7}\right)$.

б) Сократите дроби: $\frac{156}{192}$; $\frac{132}{204}$; $\frac{60}{84}$.

в) Приведите дроби $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$ к наименьшему общему знаменателю.

Тренировочные упражнения.

Н

12 Сократите дроби: а) $\frac{25}{75}$; б) $\frac{42}{63}$; в) $\frac{56}{60}$.

13 Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 5 и 20; б) 3 и 4; в) 7 и 8; г) 3 и 27; д) 16 и 24; е) 21 и 28.

14 Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{20}$; б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{24}$; в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{7}$ и $\frac{5}{8}$; д) $\frac{2}{11}$ и $\frac{3}{10}$; е) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{27}$.

П

15 Начертите единичный отрезок и отметьте на нём точку с координатой:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{4}{12}$.

16 Упростите: а) $\frac{7 \cdot 5}{15 \cdot 14}$; б) $\frac{12 \cdot 4}{8 \cdot 9}$.

М

17 Когда от пирога отрезали третью часть и ещё 5 одинаковых кусков, то от него осталось 7 таких же кусков. Сколько таких кусков составляла третья часть пирога?

Н

18 Приведите дроби к общему знаменателю, равному произведению знаменателей этих дробей:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{15}$ и $\frac{3}{16}$; г) $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{17}$; д) $\frac{9}{3}$ и $\frac{4}{11}$; е) $\frac{2}{9}$ и $\frac{3}{8}$.

19 Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю. Укажите ещё несколько общих знаменателей для каждой пары дробей:

а) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$; в) $\frac{11}{15}$ и $\frac{4}{9}$; г) $\frac{7}{24}$ и $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$; е) $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{25}$.

20 Сократите дроби: а) $\frac{23}{69}$; б) $\frac{65}{91}$; в) $\frac{140}{168}$.

П

21 Упростите: а) $\frac{3 \cdot 11}{11 \cdot 21}$; б) $\frac{15 \cdot 3}{12 \cdot 25}$.

22 Приведите дроби $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{12}$ и $\frac{19}{30}$ к наименьшему общему знаменателю.

М

23 В упаковке лежало несколько мячей. Когда из неё достали половину всех мячей и ещё два, в упаковке осталось три мяча. Сколько мячей было в упаковке первоначально?

1.2 Преобразование и сравнение дробей

Повторяем, обобщаем знания

- Какие дроби называют правильными? Приведите пример правильной дроби.
- Какие дроби называют неправильными? Приведите пример неправильной дроби.
- Как представить в виде дроби любое натуральное число?
- Приведите пример смешанной дроби.

- Как неправильную дробь представить в виде смешанной дроби?
- Как смешанную дробь представить в виде неправильной дроби?

Правильные и неправильные дроби

Дробь $\frac{m}{n}$ называют правильной, если $m < n$. Дробь $\frac{m}{n}$ называют неправильной, если $m > n$ или $m = n$ (пишут также для краткости $m \geqslant n$).

Дробь, числитель и знаменатель которой равны, соответствует *целому*, или *единице:* $\frac{n}{n} = 1$. *Например:* $\frac{3}{3} = 1$.

Если числитель неправильной дроби делится на знаменатель нацело, то дробь равна натуральному числу. *Например:* $\frac{6}{3} = 2$.

Любое натуральное число a можно представить в виде дроби со знаменателем 1, то есть $a = \frac{a}{1}$.

Преобразование неправильной дроби в смешанную

Если числитель неправильной дроби не делится на знаменатель нацело, то дробь можно представить в виде *смешанной дроби*, или *смешанного числа*.

Для этого надо числитель неправильной дроби разделить на знаменатель с остатком. При этом целая часть смешанной дроби будет равна неполному частному, а дробная часть – остатку, поделённому на прежний знаменатель.

Например: $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, где $1\frac{2}{3}$ – смешанная дробь, у которой 1 – *целая часть*, $\frac{2}{3}$ – *дробная часть*.

Эта запись означает, что $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$.

Преобразование смешанной дроби в неправильную

Каждую смешанную дробь можно записать в виде неправильной дроби. Для этого знаменатель дробной части можно умножить на целую часть, к полученному числу прибавить числитель дробной части, результат записать в числителе, а знаменатель оставить тот же.

Например: $3\frac{2}{7} = 3 + \frac{2}{7} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{7} = \frac{23}{7}$.

- Вспомните известные вам правила сравнения дробей.

Сравнение дробей

Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше; из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

Для того чтобы сравнить дроби с разными числителями и разными знаменателями, можно сначала привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями.

Смешанные дроби можно сравнивать двумя способами:

а) записываем их в виде неправильных дробей и далее действуем по правилам, сформулированным выше;

б) сравниваем отдельно целые и дробные части смешанных дробей: если целые части равны, то больше та дробь, у которой больше дробная часть; если целые части не равны, то больше та дробь, у которой больше целая часть.

Например: $2\frac{1}{2} > 2\frac{1}{9}$, так как $2 = 2$, а $\frac{1}{2} > \frac{1}{9}$; $3\frac{1}{6} > 2\frac{8}{9}$, так как $3 > 2$.

Развиваем умения

Н

1 Продолжите предложения.

а) Правильной называют дробь…
б) Неправильной называют дробь…
в) Смешанной называют дробь…
г) Натуральное число можно представить в виде дроби, у которой…
д) Если числитель неправильной дроби нацело делится на знаменатель, то…

2 Выпишите только неправильные дроби: $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{13}{2}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{12}{2}$.

3 Выпишите только те дроби, которые можно представить в виде натурального числа: $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{13}{2}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{12}{2}$.

4 Запишите пять любых натуральных чисел в виде неправильных дробей. Придумайте для каждого числа несколько вариантов записи.

5 Расскажите, приводя примеры, как

а) записать неправильную дробь в виде смешанной дроби;
б) записать смешанную дробь в виде неправильной дроби;

в) сравнить две смешанные дроби.

6 Запишите смешанные дроби в виде неправильных дробей:

а) $1\frac{1}{15}$; б) $5\frac{9}{10}$; в) $10\frac{3}{4}$; г) $7\frac{3}{11}$; д) $4\frac{4}{15}$; е) $12\frac{2}{3}$.

7 Запишите неправильные дроби в виде смешанных дробей:

а) $\frac{24}{5}$; б) $\frac{251}{24}$; в) $\frac{38}{3}$; г) $\frac{12}{11}$; д) $\frac{37}{14}$; е) $\frac{49}{20}$.

8 а) Расположите числа в порядке возрастания: $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{6}$.

б) Расположите числа в порядке убывания: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{24}$.

9 Сравните дроби, приведя их к общему знаменателю:

а) $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{18}$; б) $\frac{19}{34}$ и $\frac{1}{2}$; в) $\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{15}$; г) $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{4}$; д) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$; е) $\frac{6}{25}$ и $\frac{1}{4}$.

10 Сравните числа ($>$; $<$; $=$):

а) $\frac{12}{1} * \frac{24}{2}$; б) $\frac{24}{2} * \frac{36}{3}$; в) $\frac{36}{3} * \frac{48}{4}$.

11 Сравните числа ($>$; $<$; $=$):

а) $1\frac{1}{2} * 1\frac{1}{3}$; в) $3\frac{2}{7} * 3\frac{1}{14}$; д) $2\frac{2}{3} * 2\frac{3}{4}$;

б) $2\frac{1}{2} * 1\frac{1}{3}$; г) $3\frac{2}{7} * 4\frac{1}{14}$; е) $5\frac{2}{3} * 2\frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Запишите смешанные дроби в виде неправильных дробей: $2\frac{1}{8}$; $3\frac{3}{10}$; $5\frac{2}{5}$.

б) Сравните числа: $\frac{4}{9} * \frac{3}{5}$; $\frac{7}{14} * \frac{6}{12}$; $1\frac{1}{12} * 1\frac{5}{12}$; $3\frac{1}{8} * 3\frac{7}{14}$; $3\frac{2}{3} * 4\frac{3}{4}$.

П **Вариант II.**

а) Сократите дроби и выделите целые части: $\frac{10}{4}$; $\frac{30}{20}$; $\frac{20}{15}$.

б) Сравните числа: 2 и $\frac{10}{15}$; $\frac{18}{6}$ и 3; $\frac{16}{2}$ и $\frac{21}{3}$.

Тренировочные упражнения.

Н

12 Найдите целые части дробей:

а) $\frac{12}{5}$; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{15}{6}$; г) $\frac{29}{7}$; д) $\frac{36}{11}$; е) $\frac{107}{10}$.

13 Сократите неправильные дроби и запишите их в виде смешанных дробей:

а) $\frac{20}{8}$; б) $\frac{15}{10}$; в) $\frac{28}{21}$; г) $\frac{10}{6}$; д) $\frac{14}{4}$; е) $\frac{40}{15}$.

14 Упростите:

а) $1\frac{5}{15}$; б) $5\frac{15}{18}$; в) $10\frac{25}{75}$; г) $7\frac{26}{39}$; д) $4\frac{14}{21}$; е) $12\frac{4}{6}$.

15 Сравните числа ($>$; $<$; $=$):

а) $1\frac{1}{2} * 2\frac{1}{3}$; б) $4\frac{2}{7} * 3\frac{1}{14}$; в) $5\frac{2}{3} * 3\frac{3}{4}$; г) $3\frac{2}{3} * 5\frac{3}{4}$; д) $3\frac{2}{5} * 4\frac{1}{2}$; е) $1\frac{2}{3} * 2\frac{3}{4}$.

П

16 Отметьте числа $1\frac{4}{5}$; $1\frac{2}{10}$; $2\frac{3}{15}$; $3\frac{4}{20}$ на числовом луче с единичным отрезком, равным пяти клеточкам.

17 Аня и Наташа бросали мяч в баскетбольное кольцо из одной и той же точки площадки. Аня произвела 24 броска и попала 14 раз, а Наташа произвела 18 бросков и попала 12 раз. Чей результат лучше?

18 Запишите все дроби со знаменателем 12, расположенные между числами $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2}$.

М

19 Сравните дроби, не приводя их к общему знаменателю:

а) $\frac{6}{12}$ и $\frac{19}{16}$; б) $\frac{10}{25}$ и $\frac{15}{29}$.

Н

20 Определите, какая из дробей меньше $\frac{1}{2}$: а) $\frac{6}{8}$; б) $\frac{3}{6}$; в) $\frac{3}{12}$; г) $\frac{9}{18}$; д) $\frac{7}{10}$.

21 Определите, какая из дробей ближе к единице, и сравните их:

а) $\frac{6}{8}$ или $\frac{8}{9}$; б) $\frac{10}{12}$ или $\frac{17}{18}$.

22 Запишите дроби, которые меньше $\frac{2}{3}$: а) $\frac{4}{12}$; б) $\frac{10}{15}$; в) $\frac{3}{9}$; г) $\frac{6}{18}$.

23 Сравните дроби: а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{5}$ и $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$; д) $\frac{25}{100}$ и $\frac{1}{4}$.

П

24 Запишите в виде дроби каждое из чисел: 6; 18; 21; d.

25 Между какими двумя соседними натуральными числами на числовом луче находится число:

а) $\frac{18}{8}$; б) $\frac{35}{10}$; в) $\frac{50}{21}$; г) $\frac{32}{6}$; д) $\frac{24}{5}$; е) $\frac{40}{15}$?

М

26 Запишите несколько чисел, которые больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{1}{2}$.

27 Серёжа и Маша одновременно пошли от крыльца к колодцу. Кто из них быстрее доберётся до колодца, если Серёжа за 4 с делает 6 шагов, а Маша за 6 с – 10 шагов? (Длина шагов одинаковая.)

1.3 Сложение и вычитание дробей

Повторяем, обобщаем знания

- Вспомните правила и приёмы *сложения* дробей.

Складывая дроби с *одинаковыми* знаменателями, мы складываем только их числители, а знаменатель оставляем прежним.
Правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями можно записать так:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \frac{m + k}{n}.$$

Складывая дроби с *разными* знаменателями, предварительно приводим их к общему знаменателю, а затем складываем по правилу сложения дробей с одинаковыми знаменателями.
Для дробей справедливы переместительное и сочетательное свойства сложения:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{b} = \frac{k}{b} + \frac{m}{n}; \ \left(\frac{m}{n} + \frac{k}{b}\right) + \frac{a}{z} = \frac{m}{n} + \left(\frac{k}{b} + \frac{a}{z}\right).$$

Складывая смешанные дроби, складываем отдельно их целые и отдельно дробные части.
По этому же правилу складываем натуральные числа и смешанные дроби, считая, что натуральное число имеет дробную часть, равную нулю.
Если при сложении смешанных дробей дробная часть оказалась неправильной дробью, то записываем её в виде *смешанной дроби* и далее действуем в соответствии с правилом сложения смешанных дробей.
Если дробные части смешанных дробей имеют разные знаменатели, то при сложении их нужно сначала привести к общему знаменателю.

Вспомните правила и приёмы *вычитания* дробей.

Вычитание дробей

Правило вычитания дробей с *одинаковыми* знаменателями можно записать так:

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{n} = \frac{m - k}{n}.$$

Для того чтобы найти разность двух дробей с *разными* знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем вычитать по правилу вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Принято считать число 0 равным дроби $\frac{0}{n}$, где n – любое натуральное число.
Если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна 0.
Разность смешанных дробей можно найти, записав их в виде неправильных дробей и действуя так же, как при вычитании правильных дробей. Однако в этом случае вычисления могут быть громоздкими и трудоёмкими.

Рассмотрим, как можно вычитать смешанные дроби, не записывая их в виде неправильных дробей.

Пример 1: целая часть уменьшаемого больше, чем целая часть вычитаемого, и дробная часть уменьшаемого больше, чем дробная часть вычитаемого.

$$3\frac{5}{17} - 2\frac{2}{17} = (3 - 2) + \left(\frac{5}{17} - \frac{2}{17}\right) = 1\frac{3}{17}.$$

Пример 2: а) дробные части уменьшаемого и вычитаемого равны; б) целые части уменьшаемого и вычитаемого равны.

а) $3\frac{5}{13} - 2\frac{5}{13} = (3 - 2) + \left(\frac{5}{13} - \frac{5}{13}\right) = 1;$

б) $3\frac{5}{13} - 3\frac{2}{13} = (3 - 3) + \left(\frac{5}{13} - \frac{2}{13}\right) = \frac{3}{13}.$

Пример 3: целая часть уменьшаемого больше, чем целая часть вычитаемого, а дробная часть уменьшаемого меньше, чем дробная часть вычитаемого.
В этом случае в целой части уменьшаемого «занимаем» единицу.

$$4\frac{5}{17} - 2\frac{7}{17} = \left(3 + 1\frac{5}{17}\right) - 2\frac{7}{17} = \left(3 + \frac{22}{17}\right) - 2\frac{7}{17} =$$

$$= (3 - 2) + \left(\frac{22}{17} - \frac{7}{17}\right) = 1\frac{15}{17}.$$

Пример 4: а) уменьшаемое – смешанная дробь, вычитаемое – натуральное число; б) уменьшаемое – целое число, вычитаемое – смешанная дробь.

а) $4\frac{5}{12} - 2 = (4 - 2) + \left(\frac{5}{12} - 0\right) = 2\frac{5}{12};$

б) $4 - 2\frac{7}{12} = \left(3 + \frac{12}{12}\right) - 2\frac{7}{12} = (3 - 2) + \left(\frac{12}{12} - \frac{7}{12}\right) = 1\frac{5}{12}.$

Пример 5: дробные части уменьшаемого и вычитаемого имеют разные знаменатели. В этом случае приводим сначала дробные части к общему знаменателю.

$$3\frac{11}{12} - 2\frac{5}{6} = 3\frac{11}{12} - 2\frac{10}{12} = 1\frac{1}{12}.$$

Разность равных чисел равна 0. Вычитать из меньшего числа большее мы пока не научились.

Н

1 Продолжите предложения.

а) Для того чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, …
б) Для того чтобы сложить дроби с разными знаменателями, …
в) От перестановки слагаемых …
г) Чтобы к сумме двух дробей прибавить третью дробь, можно …

2 Расскажите, приводя примеры, как складывают смешанные дроби.

3 Сложите дроби:

а) $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{7}$; в) $\frac{1}{11}$ и $\frac{9}{11}$; г) $\frac{4}{13}$ и $\frac{7}{13}$.

4 Найдите сумму удобным для вас способом:

а) $\frac{3}{19}+\frac{1}{19}+\frac{7}{19}+\frac{6}{19}+\frac{4}{19}$; б) $\frac{5}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{27}+\frac{7}{27}+\frac{5}{27}$.

5 Приведите дроби к общему знаменателю и сложите их:

а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{11}{12}$ и $\frac{5}{6}$; в) $\frac{5}{12}$ и $\frac{11}{18}$; г) $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$.

6 Выполните сложение дробей и представьте результат в виде смешанной дроби:

а) $\frac{7}{15}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{11}{12}$ и $\frac{5}{6}$; в) $\frac{5}{12}$ и $\frac{11}{18}$; г) $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$.

7 Выполните сложение:

а) $3\frac{1}{2}+1$; б) $4\frac{3}{5}+2$; в) $4+1\frac{1}{3}$; г) $3\frac{1}{6}+\frac{9}{12}$; д) $2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$; е) $5\frac{3}{7}+\frac{6}{14}$.

8 а) Расскажите, как вычитают правильные дроби, и приведите примеры.
б) Расскажите, как вычитают смешанные дроби, и приведите примеры.

9 Найдите разность дробей. Сделайте проверку сложением:

а) $\frac{5}{5}$ и $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{7}$ и $\frac{2}{7}$; в) $\frac{10}{11}$ и $\frac{9}{11}$; г) $\frac{12}{13}$ и $\frac{7}{13}$; д) $1-\frac{2}{3}$; е) $1-\frac{2}{5}$; ж) $1-\frac{10}{11}$; з) $1-\frac{12}{18}$.

10 Приведите дроби к общему знаменателю и найдите их разность:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{6}$; б) $\frac{4}{15}$ и $\frac{1}{5}$; в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{8}$; г) $\frac{2}{8}$ и $\frac{4}{24}$.

11 Вычислите:

а) $10-\frac{5}{9}$; б) $12-\frac{5}{9}$; в) $11-\frac{12}{13}$; г) $2\frac{4}{9}-1\frac{5}{9}$; д) $3\frac{2}{5}-2\frac{3}{5}$; е) $10\frac{1}{3}-9\frac{2}{3}$;

ж) $3\frac{11}{18}-2\frac{5}{9}$; з) $5\frac{9}{15}-4\frac{2}{5}$; и) $10\frac{10}{13}-6\frac{7}{10}$; к) $7\frac{4}{21}-3\frac{1}{14}$; л) $30\frac{2}{9}-4\frac{4}{5}$;

м) $21\frac{7}{18}-1\frac{23}{24}$; н) $12\frac{13}{30}-3\frac{37}{40}$; о) $11\frac{7}{12}-5\frac{41}{42}$; п) $13\frac{1}{3}-9\frac{13}{24}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Выполните сложение: $1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$; $2\frac{3}{5}+3\frac{4}{15}$; $9\frac{1}{9}+1\frac{8}{9}$.

б) Выполните вычитание: $1\frac{11}{18}-\frac{11}{18}$; $5\frac{13}{15}-5\frac{8}{15}$; $1\frac{13}{15}-\frac{7}{20}$.

П **Вариант II**

а) Вычислите: $3\frac{1}{8}-2-\frac{4}{5}$; $4-\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)$.

б) Сравните значения выражений: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2} * \frac{1}{2}+\frac{1}{5}$; $2-\frac{2}{3} * 3-\frac{2}{3}$.

Тренировочные упражнения.

Н

12 Вычислите:

а) $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}$; б) $\frac{7}{10}+\frac{1}{10}$; в) $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$; г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$;

д) $\frac{4}{9}-\frac{2}{9}$; е) $\frac{7}{10}-\frac{1}{10}$; ж) $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$; з) $\frac{9}{15}-\frac{2}{15}$.

13 Вычислите:

а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$; б) $\frac{2}{15}+\frac{5}{12}$; в) $\frac{7}{64}+\frac{1}{20}$; г) $\frac{5}{42}+\frac{2}{3}$;

д) $\frac{4}{9}-\frac{1}{6}$; е) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$; ж) $\frac{7}{10}-\frac{8}{15}$; з) $\frac{16}{45}-\frac{2}{15}$.

14 Выполните сложение и представьте результат в виде смешанной дроби:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{9}{19}$; б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{18}$; в) $\frac{7}{10}$ и $\frac{8}{15}$; г) $\frac{16}{45}$ и $\frac{7}{15}$.

15 Выполните сложение:

а) $2\frac{5}{6}+3\frac{7}{12}$; б) $1\frac{9}{10}+2\frac{11}{15}$; в) $7\frac{6}{7}+2\frac{3}{14}$.

16 Вычислите:

а) $1-\frac{23}{30}$; г) $1-\frac{7}{10}$; ж) $1-\frac{2}{21}$;

б) $1\frac{5}{9}-1$; д) $12\frac{5}{7}-2$; з) $14\frac{2}{3}-10$;

в) $2\frac{5}{9}-1\frac{4}{9}$; е) $4\frac{3}{5}-3\frac{2}{5}$; и) $10\frac{2}{3}-8\frac{1}{3}$.

17 а) На пошив платья ушло $2\frac{1}{4}$ дня, а на отделку вышивкой – на $\frac{1}{2}$ дня больше. Сколько дней ушло на пошив и отделку платья?

б) Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Первый пешеход прошёл до встречи $\frac{3}{10}$ км, а второй – на $\frac{2}{5}$ км больше. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

в) От пункта A до пункта B автомобиль ехал $\frac{2}{3}$ ч, а от пункта B до пункта C – на $\frac{1}{6}$ ч меньше. Сколько времени затратил автомобиль, чтобы добраться от пункта A до пункта C, если в пункте B он стоял $\frac{1}{30}$ ч?

П

18 Докажите, не выполняя сложения: $\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}>\frac{1}{4}$.

М

19 Назовите дроби со знаменателем 10, которые больше $\frac{5}{9}$, но меньше $\frac{7}{9}$.

Н

20 Сложите дроби:

а) $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{7}$; в) $\frac{1}{11}$ и $\frac{9}{11}$; г) $\frac{4}{13}$ и $\frac{7}{13}$;

д) $\frac{4}{9}$ и $\frac{2}{9}$; е) $\frac{7}{10}$ и $\frac{1}{10}$; ж) $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$; з) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

21 Найдите сумму удобным для вас способом:

а) $\frac{23}{55}+\frac{21}{55}+\frac{27}{55}+\frac{26}{55}+\frac{24}{55}$; б) $\frac{15}{87}+\frac{11}{87}+\frac{19}{87}+\frac{13}{87}+\frac{17}{87}+\frac{15}{87}$.

22 Вычислите:

а) $\frac{5}{6}+\frac{7}{16}$; б) $\frac{7}{30}+\frac{1}{12}$; в) $\frac{23}{64}+\frac{1}{40}$; г) $\frac{5}{42}+\frac{1}{7}$; д) $\frac{5}{9}-\frac{5}{18}$; е) $\frac{5}{16}-\frac{5}{48}$; ж) $\frac{29}{30}-\frac{11}{15}$.

23 Вычислите:

а) $4\frac{5}{18}-2\frac{5}{9}$; в) $8\frac{6}{25}-3\frac{4}{5}$; д) $12\frac{2}{15}-2\frac{1}{5}$; ж) $9\frac{12}{18}-2\frac{6}{9}$; и) $5\frac{10}{15}-5\frac{2}{5}$;

б) $16\frac{4}{9}-1\frac{7}{9}$; г) $5\frac{13}{15}-4\frac{7}{30}$; е) $7\frac{4}{13}-6\frac{3}{26}$; з) $3\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}$; к) $2\frac{3}{5}+10\frac{2}{5}$.

24 Вычислите:

а) $3\frac{1}{8}-2\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$; в) $4\frac{3}{5}-2+\frac{7}{10}$; д) $3\frac{7}{8}-2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$;

б) $3\frac{11}{18}-1-\frac{5}{9}$; г) $2\frac{13}{30}-\left(1\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)$; е) $2\frac{8}{15}-\left(1\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\right)$.

25 Выразите в километрах: а) 1 км 500 м; б) 3 км 200 м; в) 2 250 м; г) 5 450 м; д) 2 300 м.

26 Выразите в часах: а) 1 ч 20 мин; б) 3 ч 15 мин; в) 2 ч 30 мин; г) 4 ч 24 мин; д) 90 мин; е) 165 мин.

27 Выразите в центнерах: а) 2 ц 50 кг; б) 1 ц 5 кг; в) 165 кг.

28 а) Масса дыни $2\frac{3}{5}$ кг, а масса тыквы $4\frac{7}{10}$ кг. Чему равна масса тыквы и дыни вместе? Выразите ответ в килограммах и граммах.

б) На утреннюю пробежку Ася тратит $\frac{5}{6}$ часа, а на вечернюю – на $\frac{4}{5}$ часа больше. Сколько времени у Аси занимают утренняя и вечерняя пробежки вместе? Выразите ответ в часах и минутах.

в) В магазин привезли $4\frac{3}{20}$ ц лука, 105 кг из них продали. Сколько лука осталось? Выразите ответ в центнерах и килограммах.

П

29 Сравните значения выражений:

а) $\frac{2}{7}+x * \frac{2}{3}+x$; б) $\frac{7}{12}-d * \frac{7}{18}-d$; в) $b-\frac{2}{9} * b-\frac{4}{9}$.

М

30 От ленты отрезали $\frac{5}{6}$ всей её длины, а затем ещё $\frac{1}{2}$ остатка. Какую часть ленты отрезали?

1.4 Умножение и деление дробей

Повторяем, обобщаем знания

Вспомните правила и приёмы умножения дробей.

Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей этих дробей:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{t} = \frac{m \cdot k}{n \cdot t}.$$

Чтобы умножить дробь на натуральное число, достаточно числитель этой дроби умножить на это натуральное число.

Для дробей справедливы переместительное и сочетательное свойства умножения, а также распределительное свойство умножения относительно сложения:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{b} = \frac{k}{b} \cdot \frac{m}{n}; \quad \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{b}\right) \cdot \frac{a}{z} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{k}{b} \cdot \frac{a}{z}\right);$$

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{k}{b} + \frac{a}{z}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{b} + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{z}.$$

- Придумайте две дроби и найдите их произведение.
- Умножьте полученную дробь на какое-нибудь натуральное число, большее 2.
- Запишите несколько верных равенств с дробями, используя переместительное и сочетательное свойства умножения и распределительное свойство умножения относительно сложения.
- Вспомните правила и приёмы деления дробей.

Взаимно обратные дроби

Дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ называются взаимно обратными. Их произведение равно числу 1.

Деление дробей

Чтобы разделить число на дробь, можно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Правило деления двух дробей записывается так:

$\frac{n}{m} : \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n \cdot b}{m \cdot a}$, где $m \neq 0, b \neq 0$ и $a \neq 0$.

Чтобы умножить или разделить смешанные дроби, можно записать их в виде неправильных дробей и выполнить действия так же, как описано выше.

- Придумайте две взаимно обратные дроби.
- Придумайте две правильные дроби и найдите их частное.
- Придумайте две смешанные дроби и найдите их частное.

Развиваем умения

Н

1 Продолжите предложения.

а) Для того чтобы перемножить две дроби, …
б) Для того чтобы дробь умножить на натуральное число, …
в) От перемены мест множителей произведение дробей …
г) Чтобы сумму двух дробей умножить на третью дробь, можно …
д) Чтобы произведение двух дробей умножить на третью дробь, можно …

2 Найдите произведение дробей:

а) $\frac{3}{14}$ и $\frac{4}{19}$; в) $\frac{6}{16}$ и $\frac{8}{9}$; д) $\frac{12}{18}$ и $\frac{2}{3}$; ж) $\frac{4}{9}$ и $\frac{16}{27}$; и) $\frac{14}{25}$ и $\frac{10}{56}$;

б) $\frac{10}{13}$ и $\frac{39}{100}$; г) $\frac{14}{15}$ и $\frac{5}{12}$; е) $\frac{34}{45}$ и $\frac{15}{17}$; з) $\frac{1}{18}$ и $\frac{36}{37}$; к) $\frac{7}{16}$ и $\frac{2}{21}$.

3 Сравните ($>$, $<$, $=$), не вычисляя:

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3} * \frac{2}{3}+\frac{1}{3}$;   в) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} * \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}$;

б) $\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{11}\right)\cdot\frac{4}{8} * \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{8}$;   г) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{2}{31} * \frac{2}{31}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{19}$.

4 Продолжите предложения.

а) Взаимно обратными называются дроби ...

б) Для того чтобы разделить одну дробь на другую, ...

5 Найдите частное и сделайте проверку результата умножением:

а) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$;   в) $\frac{2}{5}:\frac{5}{6}$;   д) $\frac{4}{9}:\frac{8}{9}$;   ж) $\frac{7}{30}:\frac{14}{15}$;

б) $\frac{5}{42}:\frac{4}{21}$;   г) $\frac{16}{25}:\frac{64}{75}$;   е) $\frac{100}{121}:\frac{75}{88}$;   з) $\frac{52}{81}:\frac{26}{27}$.

6 Найдите частное и сделайте проверку результата умножением:

а) $\frac{2}{5}:4$;   б) $\frac{8}{9}:2$;   в) $\frac{15}{16}:5$;   г) $\frac{6}{23}:2$.

7 а) Расскажите, как умножают смешанные дроби, и приведите примеры.

б) Расскажите, как делят смешанные дроби, и приведите примеры.

8 Найдите произведение:

а) $2\cdot\frac{5}{7}$;   в) $4\cdot\frac{2}{9}$;   д) $7\cdot\frac{1}{9}$;   ж) $\frac{11}{100}\cdot 3$;   и) $\frac{4}{13}\cdot 1$;

б) $\frac{19}{1\,000}\cdot 0$;   г) $\frac{1}{3}\cdot 3$;   е) $\frac{4}{13}\cdot 26$;   з) $\frac{19}{1\,000}\cdot 1\,500$;   к) $0\cdot\frac{10}{11}$.

9 Найдите квадрат и куб числа:

а) $\frac{1}{2}$;   б) $\frac{2}{5}$;   в) $\frac{1}{3}$;   г) $\frac{5}{2}$;   д) $1\frac{1}{2}$;   е) $3\frac{1}{3}$.

10 Выполните деление:

а) 12 : 36; в) 20 : 15; д) 25 : 75; ж) 84 : 96;
б) 100 : 30; г) 7 : 8; е) 39 : 65; з) 144 : 90.

11 Выполните деление:

а) $1 : \frac{2}{5}$; д) $1 : \frac{1}{2}$; и) $1 : \frac{2}{9}$;

б) $\frac{2}{9} : 2$; е) $\frac{7}{15} : 3$; к) $\frac{9}{16} : 6$;

в) $3\frac{2}{9} : 2\frac{1}{3}$; ж) $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$; л) $1\frac{5}{7} : 3\frac{3}{4}$;

г) $\frac{16}{21} : \frac{20}{49}$; з) $\frac{17}{30} : \frac{10}{51}$; м) $\frac{15}{28} : \frac{40}{49}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Найдите произведение: $1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5}$; $4\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{16}$.

б) Выполните деление: $\frac{2}{27} : 1\frac{1}{3}$; $2\frac{12}{18} : 2\frac{4}{9}$.

П **Вариант II.**

а) Найдите значение выражения: $\frac{8}{15} \cdot \frac{25}{32} + 1\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12}$.

б) Найдите значение выражения: $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} : 10$; $\left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$.

Тренировочные упражнения.

Н

12 Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{14}$; б) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; в) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} : \frac{10}{11}$; г) $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{9}{11}$.

13 Найдите значение выражения:

а) $\frac{11}{12} \cdot \frac{24}{55} + 3\frac{3}{4}$; в) $1\frac{3}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14}$; д) $5\frac{1}{4} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7}$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}$; г) $25 \cdot \frac{7}{15} : \frac{21}{25}$; е) $\frac{5}{9} \cdot 2\frac{1}{4} : 20$.

14 Найдите значение выражения:

а) $\left(1+2\frac{2}{3}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{15}\right)$; б) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\right):12$.

15 а) Известно, что $a \cdot b = 1$, $b = \frac{2}{3}$. Найдите a.

б) Известно, что $a \cdot b = 1$, $a = 1\frac{4}{15}$. Найдите b.

16 а) Две трети зданий в городе составляют жилые дома, $\frac{2}{3}$ из них – многоэтажные. Какую часть всех зданий в городе составляют многоэтажные жилые дома?

б) За $\frac{1}{2}$ минуты пешеход прошёл 50 м. Сколько метров он пройдёт за час? Выразите его скорость в километрах в час.

17 а) Масса дыни $5\frac{1}{2}$ кг, а масса арбуза в полтора раза больше. Чему равна масса арбуза?

б) За 1 ч автобус проехал 48 км. Сколько километров он проедет за $\frac{1}{2}$ ч; $\frac{1}{3}$ ч; $\frac{3}{4}$ ч; $\frac{5}{6}$ ч; 3 ч; $1\frac{1}{2}$ ч?

18 а) В кувшине $2\frac{4}{5}$ л воды. В чашку входит $\frac{1}{5}$ л воды. Сколько чашек воды в этом кувшине?

б) Моток верёвки длиной $17\frac{1}{2}$ м разрезали на куски по $2\frac{1}{2}$ м. Сколько таких кусков получилось?

в) За $\frac{3}{4}$ часа автобус прошёл 30 км. С какой скоростью шёл автобус?

г) Скорость велосипедиста $10\frac{1}{2}$ км/ч. За какое время он проедет 7 км?

П

19 Задуманное число уменьшили на $\frac{1}{5}$ этого числа, и в результате получилось 360. Какое число задумали?

20 а) За сутки теплоход проплыл $\frac{2}{5}$ всего пути. Какую часть пути он проплыл за треть суток?

б) Бечёвку разрезали на 6 равных частей. Какую часть всей бечёвки составляет половина одной отрезанной части?

Н

21 Найдите произведение чисел:

а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{8}$; в) $\frac{16}{9}$ и $\frac{3}{10}$; д) $\frac{6}{9}$ и $\frac{27}{3}$; ж) $\frac{3}{32}$ и $\frac{8}{27}$;

б) $\frac{7}{15}$ и $\frac{5}{49}$; г) $\frac{10}{13}$ и $\frac{26}{45}$; е) $\frac{7}{15}$ и $\frac{5}{14}$; з) $\frac{51}{64}$ и $\frac{12}{17}$.

22 Выполните деление:

а) $2\frac{2}{19} : 1\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$; в) $2\frac{15}{17} : 7$; г) $\frac{8}{15} : \frac{32}{45}$; д) $\frac{17}{15} : \frac{34}{75}$; е) $\frac{15}{28} : \frac{30}{77}$.

23 Найдите значение выражения:

а) $\left(3 + 1\frac{13}{15}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$; б) $15 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{4}{25}\right)$.

24 Выразите

а) в секундах: $3\frac{4}{5}$ мин; $2\frac{1}{2}$ ч; в) в граммах: $1\frac{3}{10}$ кг; $\frac{2}{5}$ ц;

б) в килограммах: $3\frac{1}{20}$ ц; $1\frac{2}{5}$ т; г) в минутах: $8\frac{2}{15}$ ч; $1\frac{3}{4}$ суток.

25 а) Один килограмм конфет стоит 72 р. Сколько надо заплатить за $\frac{1}{2}$ кг; $\frac{2}{3}$ кг; $\frac{3}{4}$ кг; 2 кг; $2\frac{1}{2}$ кг?

б) В одну банку помещается $\frac{1}{5}$ л варенья. Сколько понадобится таких банок, чтобы разлить 8 л варенья?

в) За $2\frac{2}{3}$ ч велосипедист проехал 24 км. За какое время он проедет 30 км?

26 а) Сколько пакетов получится, если 3 кг крупы разложить в пакеты по $\frac{1}{2}$ кг; по $\frac{1}{5}$ кг; по $\frac{1}{10}$ кг?

б) Разлили $1\frac{1}{2}$ л растительного масла в бутылки по $\frac{1}{4}$ л. Сколько бутылок наполнили?

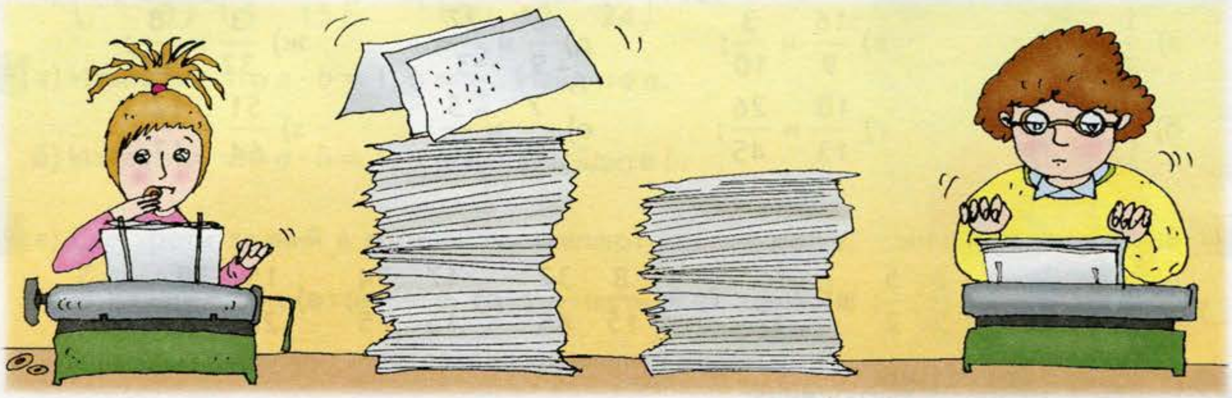
П

27 От ленты отрезали $\frac{5}{6}$ всей её длины, а затем ещё $\frac{2}{3}$ остатка. Какая часть ленты при этом осталась?

28 Сравните (>, <, =):

$a : \frac{1}{2} * a : 2$, где a – отличное от нуля число.

1.5 Решение задач



Повторяем, обобщаем знания

Решите задачу: одна машинистка выполняет работу за 3 дня, а другая – за 6 дней. За сколько дней они выполнят всю работу, если будут работать вместе?

- Решали ли вы раньше задачи такого вида?
- Как называется такой вид задач?
- Какой общий подход применяется при решении задач такого вида?
- Придумайте и решите похожую задачу.
- Что означает такое понятие, как «производительность труда»?

Решите задачу: две машины одновременно отправились из двух пунктов навстречу друг другу. Первая машина проходит это расстояние за 3 ч, вторая машина – за 6 ч. Через сколько часов они встретятся?

- Решали ли вы раньше задачи такого вида?
- Как называется такой вид задач?
- Какой общий подход применяется при решении задач такого вида?
- Придумайте и решите похожую задачу.
- Что означает такое понятие, как «скорость сближения»?
- Похож ли способ решения этой задачи на способ решения предыдущей задачи на совместную работу?

- Предположим, что вам нужно узнать, на каком расстоянии от пристани окажется ваш катер через некоторое время. Имеет ли при этом значение тот факт, происходит ли движение по реке или по озеру?
- Предположим, что ваш катер движется по реке. Какие дополнительные сведения, кроме собственной скорости катера, вам понадобятся, чтобы узнать, на каком расстоянии от пристани окажется ваш катер через некоторое время?
- Чем решение задач на движение по реке отличается от решения задач на движение в стоячей воде?

- Если в кулинарной книге записано, что для варенья на 2 части ягод следует взять 3 части сахара, то как узнать, сколько килограммов сахара следует взять на имеющиеся у вас ягоды?
- Придумайте и решите похожую задачу.
- Какой общий подход применяется при решении задач этого вида?
- Как называются задачи этого вида?

Развиваем умения

Н

1 а) За каждый час первая труба наполняет $\frac{1}{6}$ часть бака, а вторая труба – $\frac{1}{3}$ часть бака. За сколько часов они наполнят весь бак?

б) Через первую трубу можно наполнить бак за $\frac{1}{6}$ часа, через вторую трубу – за $\frac{1}{4}$ часа. За сколько минут можно наполнить бак через обе трубы?

2 Одна бригада может выполнить работу за 6 дней, а другая – за 12 дней. Какую часть работы выполнят обе бригады за день, если будут работать вместе?

3 Две машины одновременно отправились из двух пунктов навстречу друг другу. Первая машина проходит за час $\frac{1}{3}$ этого расстояния, вторая машина – $\frac{1}{2}$ его часть. Через какое время они встретятся?

4 а) Найдите скорость катера по течению реки и скорость против течения, если его собственная скорость $10\frac{4}{5}$ км/ч, а скорость течения реки – $\frac{6}{5}$ км/ч.

б) Скорость лодки по течению реки равна $12\frac{3}{10}$ км/ч, а скорость течения реки – $4\frac{3}{4}$ км/ч. Найдите собственную скорость лодки и её скорость против течения реки.

5 Для варенья из малины на 3 части ягод надо брать 2 части сахара.

а) Сколько килограммов сахара следует взять на $1\frac{1}{5}$ кг ягод?

б) Сколько килограммов малины надо взять на $1\frac{1}{5}$ кг сахара?

6 Требуется смешать 7 частей муки и 2 части сахара. Сколько муки и сколько сахара в отдельности надо взять, чтобы получить $4\frac{1}{2}$ кг смеси?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Две машинистки выполнили работу за 4 дня. Если бы работала одна из них, она выполнила бы эту работу за 6 дней. Какую часть работы выполняла каждая машинистка за день?

б) Скорость лодки по течению реки равна $10\frac{1}{6}$ км/ч, а скорость течения реки – $2\frac{1}{3}$ км/ч. Найдите собственную скорость лодки и её скорость против течения реки.

П **Вариант II.**

а) Скорость катера по течению реки равна $16\frac{7}{10}$ км/ч, а скорость течения реки $3\frac{1}{4}$ км/ч. На каком расстоянии от пристани окажется этот катер через $\frac{3}{4}$ часа, если будет двигаться против течения реки?

б) В начинку для пирога кладут 4 части орехов и 1 часть сахара. Сколько орехов и сколько сахара надо взять, чтобы приготовить $\frac{1}{4}$ кг начинки?

Тренировочные упражнения.

Н

7 Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали две машины. Одна машина проезжает за час $\frac{1}{5}$ расстояния между городами, а другая – $\frac{1}{3}$. Какая часть расстояния будет между машинами через час после выезда?

8 а) Два тракториста вспахали участок за 3 ч. Если бы первый тракторист работал один, то он выполнил бы эту работу за 5 ч. Какую часть работы выполнял второй тракторист за 1 ч?

б) Один насос может выкачать воду из бассейна за 6 ч, а другой – за 4 ч. Какая часть бассейна останется заполненной водой после 1 ч их совместной работы?

П

9 Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и, встретившись в пути, продолжали идти дальше. Через $\frac{5}{12}$ ч после их встречи расстояние между ними стало равным $3\frac{3}{4}$ км. С какой скоростью движется первый пешеход, если скорость второго пешехода равна $3\frac{1}{2}$ км/ч?

М

10 а) От A до B плот плывёт 40 ч, а катер – 4 ч. Сколько времени катер плывёт от B до A?

б) Катер проплывает некоторое расстояние по озеру за 6 ч, а такое же расстояние по течению реки – за 5 ч. Сколько времени потребуется плоту, чтобы проплыть такое же расстояние по реке?

в) Пароход прошёл от A до B по течению реки за 2 ч, а вернулся назад за 3 ч. Сколько времени будет плыть бревно от A до B?

Н

11 Два токаря совместно выполнили работу за 36 мин. Первый токарь, работая один, выполнит ту же работу за 1 ч. За сколько часов второй токарь выполнит эту работу, работая один?

12 Автобус проезжает расстояние между двумя городами за 30 ч. Если автобус и легковая машина одновременно выедут из этих городов навстречу друг другу, то они встретятся через 12 ч. За сколько часов расстояние между городами проезжает легковая машина?

П

13 а) Одна машинистка выполняет работу за 3 ч, а другая – за 4 ч. Какую часть работы они выполнят, работая вместе, за $\frac{1}{2}$ ч?

б) Для приготовления крема берут 1 часть сметаны и 2 части сахарного песка. Сколько сметаны и сколько сахарного песка надо взять, чтобы приготовить $\frac{3}{4}$ кг крема?

14 Заготовленных материалов хватит двум мастерам для работы на 10 дней или первому мастеру на 30 дней. На сколько дней хватило бы этих материалов для работы второму мастеру?

М

15 От причала вниз по реке отплыл плот. Ниже по течению реки на расстоянии 17 км от этого причала находится второй. От него навстречу плоту через $\frac{2}{3}$ ч после отплытия плота отправился теплоход. Через какое время после своего отплытия плот встретится с теплоходом, если собственная скорость теплохода равна 20 км/ч, а скорость течения реки – 3 км/ч?

16 Из пунктов A и B одновременно вышли два пешехода. Они встретились через 20 мин после выхода, а через 10 мин ещё первый пришёл в пункт B. Через какое время после своего выхода из B второй пешеход пришёл в пункт A?

ГЛАВА II **ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ**

2.1 Понятие десятичной дроби. Запись и чтение десятичных дробей

Вспоминаем то, что знаем

- Прочитайте дроби: $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10\,000}$. Какую часть от целого составляет каждая из них?

Открываем новые знания

- Объясните, что означает каждое число справа от знака равенства в каждом из этих равенств: $\frac{4}{10}=0,4$; $\frac{3}{100}=0,03$; $\frac{7}{1\,000}=0,007$.
- Какой способ использован при записи этих чисел?
- Как записать дроби $\frac{6}{100}$; $\frac{99}{1\,000}$; $\frac{105}{10\,000}$, пользуясь рассмотренным выше способом записи?

?!

- Как называют дроби 0,7; 0,23; 0,06? Объясните, что означают такие записи.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Дроби 0,1; 0,3; 0,01; 0,001; 0,005 и т.д. называются **десятичными**. Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1 000, ... (любой степени числа 10), можно записать в виде десятичной дроби.

Способ записи десятичных дробей аналогичен обычному позиционному способу записи *натуральных чисел*: значение цифры зависит от её места в записи числа (разряда), и единицы двух соседних разрядов отличаются друг от друга в 10 раз. Для записи десятичных дробей используют разряды, которые идут слева направо от запятой, поставленной после разряда единиц. В них указывают доли единиц: в первом разряде после запятой указывают число десятых долей (это **разряд десятых**), во втором разряде после запятой указывают число сотых долей (это **разряд сотых**) и т.д. Цифра 0 выполняет свою обычную роль, она показывает отсутствие единиц соответствующего разряда.

единицы			сотые		десятитысячные		миллионные
0	,	3	4	1	5	7	8
		десятые		тысячные		стотысячные	

Разряды десятичных дробей

При переходе от десятичной дроби к обыкновенной и наоборот следует помнить, что в десятичной дроби после запятой столько же цифр, сколько нулей в знаменателе соответствующей ей обыкновенной дроби.

$$\frac{5}{1\underline{00}} = 0,\underline{05};\ \frac{4}{1\underline{0}} = 0,\underline{4};\ \frac{15}{1\,\underline{000}} = 0,\underline{015}.$$

Вспоминаем то, что знаем

- Даны две дроби: $4\frac{12}{100}$ и 12,04. Какая из них читается так: «четыре целых двенадцать сотых»?

Открываем новые знания

- Запишите дробь 12,04 в виде обыкновенной и прочитайте её. Можно ли прочитать эту дробь, не переходя к обыкновенной?

?!

- Как читаются десятичные дроби?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

12,04 – это десятичная запись числа $12\frac{4}{100}$, и читаются эти две дроби одинаково: «двенадцать целых четыре сотых».

Чтение десятичных дробей

Десятичную дробь можно прочитать и не переходя к обыкновенной. При этом сначала читают часть, стоящую *до* запятой. Это целая часть данной дроби, поэтому после её прочтения произносят слово «целых».
Затем читают часть, стоящую *после* запятой, и добавляют название последнего разряда.
Например: 0,105 – «ноль целых сто пять тысячных».

Вспоминаем то, что знаем

- Изобразите точками на числовом луче числа $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{5}$; $2\frac{3}{10}$.

Открываем новые знания

- Как на числовом луче изобразить число 0,7?

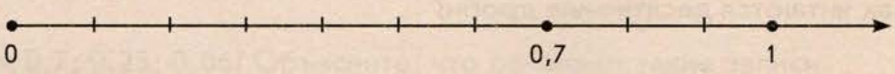
?!

- Как изобразить точкой на числовом луче десятичную дробь?

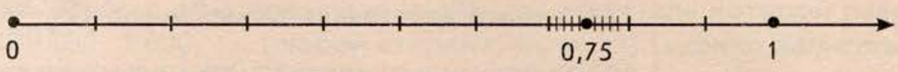
Отвечаем, проверяем себя по тексту

Изображение десятичных дробей на числовом луче

Десятичные дроби изображают на числовом луче так же, как и обыкновенные.
Если мы хотим построить точку, соответствующую числу 0,7, то для этого сначала отметим на числовом луче точку 1, то есть выберем единичный отрезок, а затем разделим его на 10 равных частей и отсчитаем 7.



Для того чтобы построить точку, соответствующую десятичной дроби 0,75, делят на 10 равных частей десятую долю единичного отрезка, которая следует за точкой с координатой 0,7, получают сотые доли и отсчитывают 5 таких долей.



Н

1 Продолжите предложения.

а) Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой равен некоторой степени числа 10, можно заменить…

б) Разряды десятичных дробей слева направо от запятой называются…

в) Для того чтобы прочитать десятичную дробь, …

2 Запишите обыкновенные и смешанные дроби десятичной дробью и назовите число единиц каждого разряда слева направо:

а) $3\frac{2}{10}$; б) $\frac{15}{100}$; в) $\frac{2}{100}$; г) $5\frac{125}{1\,000}$; д) $2\frac{12}{1\,000}$; е) $\frac{5\,476}{1\,000}$; ж) $\frac{623}{10\,000}$; з) $12\frac{11}{1\,000\,000}$.

3 Прочитайте десятичную дробь и назовите число единиц каждого разряда слева направо:

а) 13,45; б) 4,07; в) 0,123; г) 105,0060; д) 70,100005.

4 Запишите десятичную дробь и представьте её в виде суммы разрядных слагаемых. Образец: две целых четыреста тридцать пять тысячных – 2,435;

$$2{,}435 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1\,000} = 2 + 0{,}4 + 0{,}03 + 0{,}005.$$

а) две целых шесть десятых;
б) семнадцать целых тридцать одна сотая;
в) ноль целых двадцать семь тысячных;
г) шестьдесят семь целых три стотысячных.

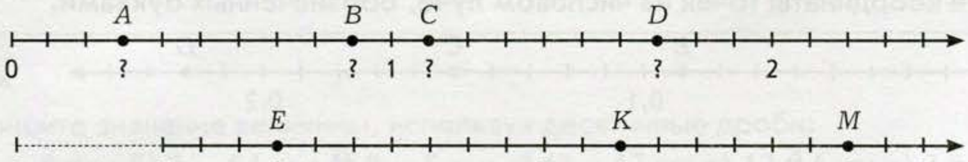
5 Запишите в виде смешанной дроби:

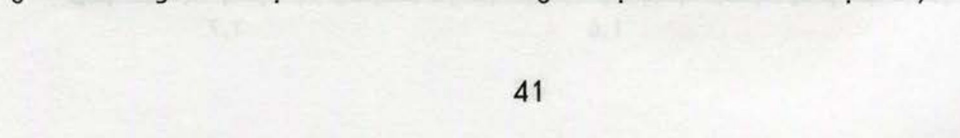
а) 1,5; б) 11,12; в) 256,073; г) 30,0009; д) 105,50000.

6 Запишите в виде неправильной дроби:

а) 12,3; б) 1,23; в) 10,123; г) 987,5; д) 98,76; е) 3, 3456; ж) 33, 456.

7 Назовите числа, отмеченные точками на числовом луче.

а) 

б) 

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Представьте в виде суммы разрядных слагаемых: 3,615.

б) Запишите десятичной дробью: $1\dfrac{25}{1\,000}$; $\dfrac{128}{10\,000}$.

П **Вариант II**

а) Запишите десятичную дробь и представьте её в виде суммы разрядных слагаемых: семь целых триста сорок пять стотысячных.

б) Запишите десятичной дробью: $\dfrac{1\,896}{10\,000}$; $20\dfrac{25}{100\,000}$.

Тренировочные упражнения.

Н

8 Запишите обыкновенные и смешанные дроби в виде десятичных и прочитайте полученные записи:

а) $4\dfrac{15}{100}$; $230\dfrac{3}{100}$; $\dfrac{2}{100}$;

б) $3\dfrac{1}{1\,000}$; $7\dfrac{15}{1\,000}$; $\dfrac{90}{1\,000}$;

в) $6\dfrac{5}{10\,000}$; $2\dfrac{17}{10\,000}$; $\dfrac{675}{10\,000}$; $\dfrac{1\,243}{10\,000}$;

г) $7\dfrac{7}{100\,000}$; $100\dfrac{45}{100\,000}$; $\dfrac{478}{100\,000}$; $\dfrac{1\,111}{100\,000}$.

9 Прочитайте дроби, назовите их целые части, назовите цифры разрядов десятых, сотых и т.д.

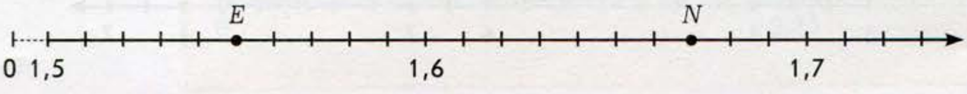
а) 16,789; 0,1234; 100,56789;

б) 0,023; 7,00526; 0,00017.

10 Начертите числовой луч (возьмите за единичный отрезок 10 клеточек) и отметьте на нём числа: 0,2; 0,25; 1,5; 1,25.

11 Запишите координаты точек на числовом луче, обозначенных буквами.

а) 

б) 

П

12 а) В числе 14 025 сначала отделите запятой одну цифру справа и прочитайте получившуюся десятичную дробь, затем последовательно сдвигайте запятую на одну цифру влево, пока это возможно, и читайте каждое получившееся число.

б) В числе 3,056987 последовательно сдвигайте запятую на одну цифру вправо, пока это возможно, и читайте каждую получившуюся десятичную дробь.

13 Выразите в метрах и дециметрах: а) 4,5 м; б) 7,8 м; в) 0,3 м.
Работайте по образцу: 9,2 м = 9 м 2 дм.

М

14 Запишите все десятичные дроби, которые можно составить из цифр 0,1,2, причём запятую и каждую цифру в записи числа нужно использовать, и лишь один раз.

Н

15 Запишите смешанные дроби в виде десятичных:

а) $1\frac{2}{10}$; б) $30\frac{3}{10}$; в) $4\frac{368}{1\,000}$; г) $675\frac{52}{10\,000}$; д) $100\frac{4\,567}{100\,000}$.

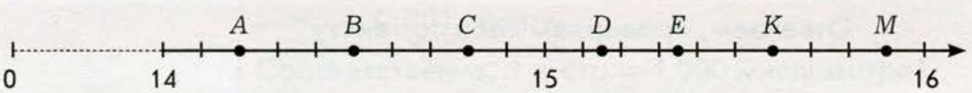
16 Запишите в виде обыкновенной или смешанной дроби:

а) 0,68; 0,03; 0,206; в) 7,5; 4,05; 3,64;
б) 0,007; 0,0021; 0,0005; г) 45,0471; 302,0054.

17 Начертите числовой луч (примите за единичный отрезок 10 клеточек) и отметьте на нём числа: 0,7; 0,5; 1,2; 2,1.

П

18 На числовом луче некоторые точки обозначены буквами. Какие из них соответствуют числам: 14,8; 15,15; 15,90?



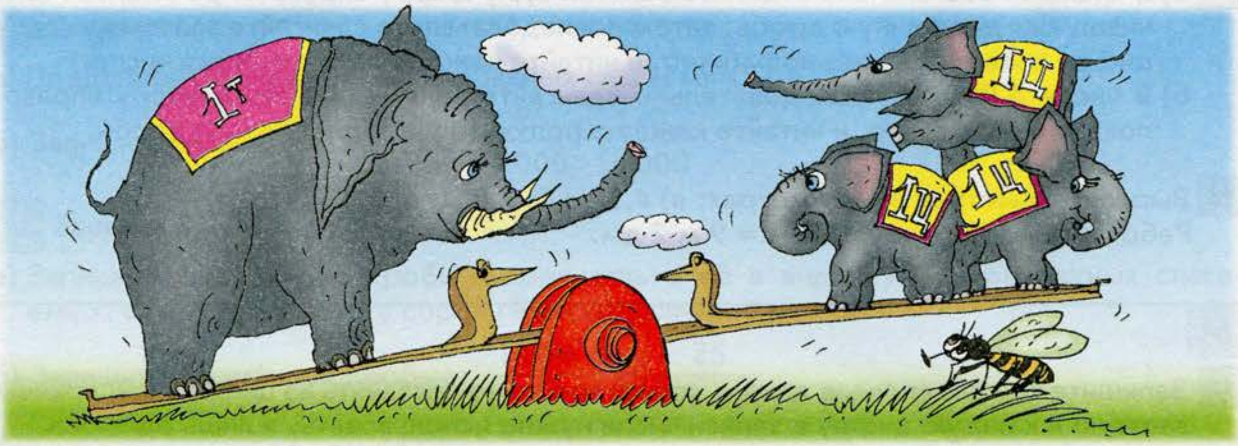
19 Отметьте на числовом луче точки с координатами:

а) 0,35; б) 0,29; в) 1,21.

М

20 Запишите значение величины, используя десятичные дроби:
а) 5 м 6 дм; б) 7 м 54 см; в) 9 м 5 см; г) 11 ц 67 кг; д) 12 ц 6 кг; е) 3 р. 5 к.

2.2 Десятичные дроби и метрическая система мер



Вспоминаем то, что знаем

- Выразите в дециметрах: 5 м; 11 км.

Открываем новые знания

- Как выразить в дециметрах 4 см; 12 мм? Можно ли это сделать с помощью десятичных дробей?
- Как выразить в килограммах 7 г? Можно ли это сделать с помощью десятичной дроби? Как?

?!

- Как, используя десятичные дроби, можно записывать соотношения, связывающие единицы длины? соотношения, связывающие единицы массы? Единицы измерения ещё каких известных вам величин можно достаточно просто выражать с помощью десятичных дробей?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Вам уже известно, что большинство людей в мире пользуются *метрической системой мер*. В этой системе одна единица получается из другой умножением или делением на 10, 100, 1 000 и т.д.

Десятичные соотношения между различными метрическими единицами отражены в их названиях.

Приставка *«кило»* означает увеличение в 1 000 раз. Например, *километр* – это 1 000 метров.

Соответственно, метр – это $\frac{1}{1\,000}$ километра, или 1 метр = = 0,001 километра.

Приставка *«гекто»* означает увеличение в 100 раз. Например, *гектар* – это 100 ар.

Соответственно, ар – это $\frac{1}{100}$ гектара, или, используя десятичные дроби, это соотношение можно записать так: 1ар = 0,01 гектара.

Приставка *«дека»* означает увеличение в десять раз. Например, *декалитр* – это 10 литров.

Соответственно, литр – это $\frac{1}{10}$ декалитра, или, используя десятичные дроби, это соотношение можно записать так: 1 литр = = 0,1 декалитра.

Приставка *«деци»* означает уменьшение в 10 раз. Например, *дециметр* – это $\frac{1}{10}$ метра, или, используя десятичные дроби, это соотношение можно записать так: 1 дециметр = 0,1 метра.

Соответственно, 1 метр = 10 дециметров.

Приставка *«санти»* означает уменьшение в 100 раз. Например, *сантиметр* – это $\frac{1}{100}$ метра, или, используя десятичные дроби, это соотношение можно записать так: 1 сантиметр = 0,01 метра.

Соответственно, 1 метр = 100 сантиметров.

Приставка *«милли»* означает уменьшение в 1 000 раз. Например, *миллиметр* – это $\frac{1}{1\,000}$ метра, или, используя десятичные дроби, это соотношение можно записать так: 1 миллиметр = 0,001 метра.

Соответственно, 1 метр = 1 000 миллиметров.

Развиваем умения

Н

1 Продолжите предложения.

а) Десятая часть метра – это ...

б) Сотая часть метра – это ...

в) Тысячная часть метра – это ...

г) Тысячная часть километра – это ...

2 Заполните пропуски. Используйте при записи там, где это необходимо, десятичные дроби.

а) 1 кг = … г; 1 г = … кг;
б) 1 ц = … кг; 1 кг = … ц;
в) 1 т = … ц; 1 ц = … т;
г) 1 т = … кг; 1 кг = … т.

3 Выразите

а) в метрах и сантиметрах: 3,15 м; 8,54 м; 7,03 м;
б) в килограммах и граммах: 8,537 кг; 9,056 кг; 7,008 кг;
в) в тоннах и килограммах: 0,568 т; 4,035 т; 5,004 т.
Работайте по образцу: 2,81 м = 2 м 81 см.

4 Запишите значение величины, используя десятичные дроби.

Образец: 12 дм 5 мм = 12,05 дм.

а) 3 км 6 м; в) 7 м 4 мм; д) 4 м 25 см;
б) 12 ц 54 кг; г) 1 т 4 ц; е) 15 кг 75 г.

5 а) Назовите известные вам единицы площади и выпишите соотношения между ними.
б) Как называется сотая часть квадратного метра, сотая часть квадратного дециметра, сотая часть квадратного сантиметра?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Выразите в метрах: 2 дм; 3 см; 5 мм.
б) Выразите в тоннах: 2 ц; 3 кг; 4 г.

П **Вариант II**

а) Выразите в метрах: 500 см; 60 см; 2 м 3 см.
б) Выразите в килограммах: 50 г; 60 ц; 3 г 15 мг.

Тренировочные упражнения.

Н

6 Найдите ложные высказывания и исправьте в них правую часть равенства.

а) 1 кг 85 г = 1,85 кг; в) 3 т 25 кг = 3,025 т;
б) 35 мм = 0,35 см; г) 5 дм = 0,005 км.

7 Выразите

а) в метрах: 3 дм; 4 см; 72 см; 2 мм; 65 мм; 564 мм;
б) в дециметрах: 6 см; 4 мм; 25 мм;
в) в километрах: 126 м; 45 м; 4 м; 345 дм; 56 см;
г) в килограммах: 356 г; 7 г;
д) в тоннах: 4 ц; 44 ц; 6 кг; 678 кг; 5 г.

8 Какую часть составляет:

а) 1 $мм^2$ от 1 $см^2$; б) 1 $см^2$ от 1 $дм^2$; в) 1 $см^2$ от 1 $м^2$;

г) 1 $мм^2$ от 1 $дм^2$; д) 1 $мм^2$ от 1 $м^2$?

Запишите ответ десятичной дробью.

9 Найдите площадь прямоугольника со сторонами: 1,2 см и 2,4 см (в $мм^2$).

П

10 На двух участках прямоугольной формы посеяли пшеницу. Размеры первого участка 200 м × 350 м, а второго – 600 м × 400 м. С первого участка собрали 56 т пшеницы, а со второго – 156 т. Урожайность – это число центнеров пшеницы, собранных с одного гектара. Сравните урожайности этих двух участков.

М

11 Выразите в метрах: 2,3 мм; 5,04 км.

Н

12 Выразите

а) в метрах: 12 дм; 5 см; 12 см; 7 мм; 89 мм; 454 мм;

б) в дециметрах: 13 см; 24 см; 25 мм;

в) в километрах: 1 785 м; 4 560 м; 4 м; 3 789 дм; 56 см;

г) в центнерах: 356 кг; 7 кг.

13 а) Длина прямоугольного участка земли 500 м, а ширина 300 м. Сколько центнеров зерна собрали с этого участка, если с 1 га собирали по 30 ц?

б) С прямоугольного участка земли шириной 200 м и длиной 300 м собрали 180 ц ржи. Сколько центнеров ржи получили с одного гектара?

П

14 Выразите в метрах: 4 дм 7 см 5 мм; 12 дм 2 см 1 мм; 3 дм 9 мм.

М

15 Выразите в квадратных метрах: 3,6 $дм^2$; 0,45 га.

Сравнение десятичных дробей

Вспоминаем то, что знаем

- Сравните числа $\frac{4}{10}$ и $\frac{40}{100}$; $\frac{40}{100}$ и $\frac{400}{1\,000}$.

Открываем новые знания

- Сравните числа 1,2 и 1,20; 1,20 и 1,200.

?!

Если отбросить нули, записанные в конце десятичной дроби, то как изменится дробь? Если приписать к десятичной дроби справа несколько нулей, то как изменится дробь?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Нули в конце записи десятичной дроби

Запишем числа 2,6 и 2,60 в виде обыкновенных дробей и сравним: $2{,}6 = \frac{26}{10}$; $2{,}60 = \frac{260}{100}$. В соответствии с основным свойством дроби $\frac{26}{10} = \frac{260}{100}$, следовательно, $2{,}6 = 2{,}60$.

Такое же рассуждение можно привести для любой другой десятичной дроби.

Например: $2{,}3 = 2{,}30 = 2{,}300$ и т.д. $0{,}07 = 0{,}070 = 0{,}0700$ и т.д.

Можно сделать следующий вывод: *если к десятичной дроби приписать справа какое угодно количество нулей, то получится дробь, равная данной.*

Отсюда следует, что *если в десятичной дроби последние цифры нули, то, отбросив их, получим дробь, равную данной.*

Например: $3{,}20 = 3{,}2$; $0{,}05600 = 0{,}056$.

Вспоминаем то, что знаем

- Сравните числа 17; $\dfrac{170}{10}$ и $\dfrac{1\,700}{100}$.

Открываем новые знания

- Сравните числа 17; 17,0 и 17,00.

?!

- Можно ли записать любое натуральное число в виде десятичной дроби? Как?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Любое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби с любым знаменателем, являющимся степенью числа 10.

Например: $4 = \dfrac{40}{10} = \dfrac{400}{100} = \dfrac{4\,000}{1\,000}$ и т.д.

Переведя обыкновенные дроби в десятичные, получим: $4 = 4{,}0 = 4{,}00 = 4{,}000$ и т.д.

Таким образом, любое натуральное число можно записать в виде десятичной дроби, приписав справа от него запятую, а после запятой – какое угодно количество нулей.

Например: $5 = 5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000$ и т.д.

$90 = 90{,}0 = 90{,}00 = 90{,}000$ и т.д.

Вспоминаем то, что знаем

- Сравните числа 5 000 и 4 999. Расскажите, какие есть способы сравнения двух натуральных чисел.

Открываем новые знания

- Сравните числа 5 и 4,999. Как вы рассуждали?

- Можно ли сравнить десятичные дроби, не заменяя их обыкновенными? Как это сделать?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Представим числа 2,989 и 2,012 в виде обыкновенных дробей и сравним их:

$$2\frac{989}{1\,000} > 2\frac{12}{1\,000}.$$

Теперь сравним числа 2,989 и 2,012 по разрядам. Результат, конечно, получается тот же самый: 2,989 > 2,012, так как целые части этих дробей равны, но различаются цифры в разряде десятых: 9 десятых больше, чем 0 десятых.

Десятичные дроби сравнивают так же, как натуральные числа: по разрядам. Такой способ сравнения десятичных дробей значительно проще, чем способ, основанный на преобразовании десятичных дробей в обыкновенные.

Далее мы увидим, что действия над десятичными дробями почти не отличаются от действий с натуральными числами и поэтому зачастую оказываются значительно проще, чем действия с обыкновенными дробями.

Развиваем умения

Н

1 Выберите среди предложенных чисел равные и запишите их группами. Объясните свой выбор.

а) 2,300; 2,003; 2,3; 2,30; 2,03;

б) 80,0; 80,00; 8,000; 80.

2 Продолжите предложения.

а) Если к любой десятичной дроби приписать справа три нуля, то получится число...

б) Если к любому натуральному числу приписать справа три нуля, то получится число...

в) Если к любому натуральному числу приписать справа запятую, а после неё три нуля, то получится число...

3 Запишите только верные равенства.

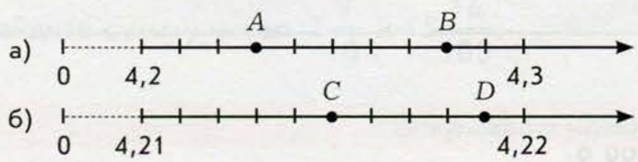
а) 11,30 = 11,3; б) 25 = 250; в) 1,03 = 1,30; г) 4 = 4,0.

4 Замените десятичную дробь какой-нибудь равной ей десятичной дробью:
а) 1,2000; б) 80,0200; в) 0,3050; г) 0,0030; д) 31,040400; е) 3,03800.

5 Уравняйте число цифр после запятой у дробей:
а) 2,2 и 3,51; в) 7,2001 и 8,00007; д) 9,0001 и 7,09;
б) 3,125 и 0,54007; г) 0,00009 и 5,4000; е) 0,1100 и 4,1.

6 Сравните числа (>; <; =):
а) 6,35 * 5,19; е) 40,002 * 40,02; л) 13,9 * 19,3;
б) 7,48 * 7,5; ж) 17,183 * 17,09; м) 0,001 * 0,010;
в) 12,39 * 1,2399; з) 29,5 * 29,53; н) 12,78 * 12,87;
г) 4,1234 * 4,1231; и) 0,00041 * 0,0005; о) 1,708 * 1,78;
д) 0,48 * 0,4; к) 8 * 7,99; п) 21,1 * 21,111.

7 Назовите десятичные дроби, отмеченные точками на числовом луче.



Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Замените десятичную дробь какой-нибудь равной ей дробью: 0,300; 20,050; 0,003.
б) Сравните числа (>; <; =): 0,19 * 0,2; 6,542 * 6,541; 10,001 * 10,01.

П **Вариант II.**

а) Расположите числа в порядке убывания: 0,94; 0,09; 0,93; 0,091.
б) Запишите три различные десятичные дроби, каждая из которых больше, чем 1,42, но меньше, чем 1,43.

Тренировочные упражнения.

Н

8 Сравните числа (>; <; =):
а) 30,001 и 30,01; в) 17,183 и 17,09; д) 459,259 и 459,295;
б) 19,53 и 1,953; г) 13,004 и 12,9; е) 0,00007 и 0,0000700.

9 Назовите какую-нибудь десятичную дробь, которая больше, чем 0,5, но меньше, чем 0,6.

10 Расположите числа
а) в порядке убывания: 0,08; 0,10; 0,11; 0,081;
б) в порядке возрастания: 2,356; 2,35; 2,36.

П

11 Запишите вместо « * » какую-нибудь цифру, чтобы получилось верное неравенство.
а) $18,{*}5 < 18,45$; б) $8,32{*} > 8,327$; в) $2,341 < 2,3{*}1$.

12 Запишите вместо « * » какую-нибудь десятичную дробь, чтобы получилось верное неравенство.
а) $* < 0,2$; б) $* < 0,02$.

М

13 Сравните:
а) $\frac{1}{3}$ и 0,5; б) 0,25 и $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{7}$ и 0,3.

14 Перенесите или поставьте запятую так, чтобы каждое из данных чисел содержало ровно 3 целых:
а) 32; б) 0,32; в) 3 200; г) 0,0032.
Расскажите, во сколько раз увеличилось или уменьшилось каждое из первоначальных чисел.

Н

15 Сравните числа ($>$; $<$; $=$):
а) 0,0015 и 0,01; в) 100,183 и 99,9;
б) 1,42 и 1,402; г) 3,004 и 3,040.

16 Расположите числа
а) в порядке убывания: 0,815; 0,108; 0,180; 0,0815;
б) в порядке возрастания: 1,150; 1,105; 1,510.

17 а) Укажите среди перечисленных отрезок наибольшей длины:
$AB = 367$ см; $CD = 5\ 698$ мм; $EF = 79$ дм; $GH = 2,8$ м.
б) Укажите среди перечисленных отрезок наименьшей длины:
$AK = 3,37$ м; $BD = 57,2$ дм; $MK = 167,24$ см; $LG = 6\ 318$ мм.
в) Укажите среди перечисленных отрезки одинаковой длины:
$MN = 0,0834$ м; $KL = 83,4$ см; $ST = 0,834$ дм; $PQ = 834$ мм.

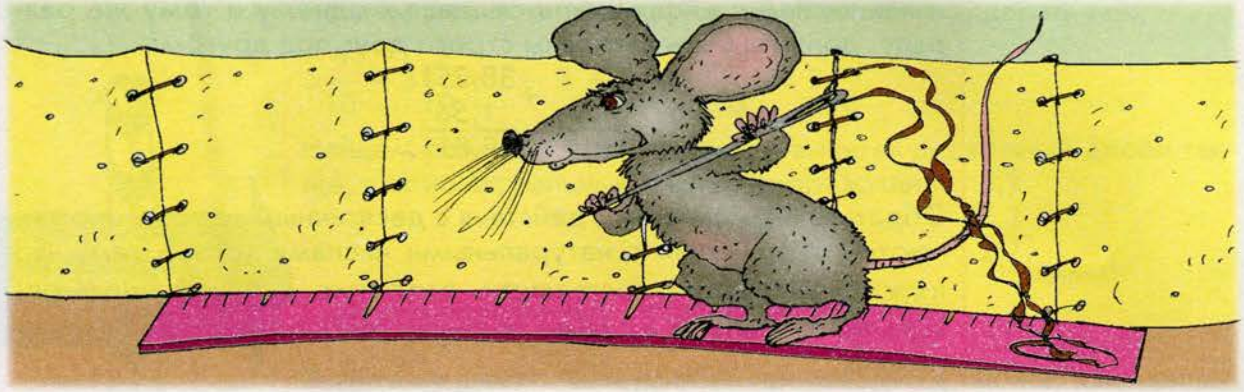
П

18 Назовите все возможные цифры, которые можно поставить вместо « * », чтобы получилось верное неравенство.
а) $0,{*}1 < 0,21$; б) $0,15{*} > 0,158$; в) $0,070 < 0,0{*}0$.

19 Запишите вместо « * » какую-нибудь десятичную дробь, чтобы получилось верное неравенство.
а) $* > 0,2$; б) $* > 0,02$.

20 В десятичной дроби среди цифр, стоящих после запятой, есть ровно один нуль. Этот нуль вычеркнули. Сравните получившееся число с исходным, если этот нуль стоял:
а) в конце десятичной дроби; б) не в конце десятичной дроби.

2.4 Сложение и вычитание десятичных дробей



Вспоминаем то, что знаем

- Найдите сумму чисел $2\frac{9}{10}$ и $15\frac{16}{100}$.

Открываем новые знания

- Как найти сумму чисел 13,4 и 1,7, не меняя их десятичной записи?

?!

- Как складывают десятичные дроби?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Найдём сумму чисел 3,4 и 5,3. Это можно сделать, перейдя к обыкновенным дробям:

$$3\frac{4}{10} + 5\frac{3}{10} = 3 + 5 + \left(\frac{4}{10} + \frac{3}{10}\right) = 8\frac{7}{10}.$$

Найдём сумму этих же чисел, складывая десятичные дроби так же, как и натуральные числа, – поразрядно:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}3{,}4\\ 5{,}3\end{array}\\ \hline 8{,}7.\end{array}$$

Сравним полученные результаты: $8\frac{7}{10} = 8{,}7$.

Сложение десятичных дробей, так же как и сложение натуральных чисел, можно выполнять поразрядно. В некоторых случаях это легко сделать устно.

Сложим числа 38,251 и 1,56. Устно это сделать сложно, поэтому запишем их в столбик так же, как мы поступали с натуральными числами: цифры, относящиеся к одному и тому же разряду, должны быть записаны строго друг под другом:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 38{,}251 \\ 1{,}56 \end{array} \\ \hline 39{,}811. \end{array}$$

Обратите внимание, что действия с десятичными дробями отличаются от действий с натуральными числами только тем, что *нужно правильно поставить запятую в полученном результате*: запятая в сумме должна стоять под запятыми в слагаемых.

Иногда для простоты вычислений принято *уравнивать число разрядов* в тех числах, над которыми производятся действия, приписывая нули на «пустых» местах. Это похоже на приведение обыкновенных дробей к общему знаменателю.

Например:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 38{,}251 \\ 1{,}560 \end{array} \\ \hline 39{,}811. \end{array}$$

Для десятичных дробей выполняются переместительный и сочетательный законы сложения, так как эти законы выполняются для равных им обыкновенных дробей. Это позволяет в сумме нескольких слагаемых переставлять слагаемые и заключать их в скобки любым образом и опускать скобки по тем же правилам, что и для обыкновенных дробей.

Вспоминаем то, что знаем

- Найдите разность чисел $15\frac{4}{10}$ и $\frac{2}{100}$.

Открываем новые знания

- Как найти разность чисел 15,9 и 9,2, не меняя их десятичной записи?

?!

- Как вычитают десятичные дроби?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Найдём разность чисел 5,9 и 3,2. Это можно сделать так:

$$5\frac{9}{10} - 3\frac{2}{10} = 5 - 3 + \left(\frac{9}{10} - \frac{2}{10}\right) = 2\frac{7}{10}.$$

Найдём разность этих же чисел, вычитая десятичные дроби так же, как и натуральные числа, – поразрядно:

$$\begin{array}{r} -\,5{,}9 \\ \underline{3{,}2} \\ 2{,}7. \end{array}$$

Сравним полученные результаты: $2\frac{7}{10} = 2{,}7$.

Вычитание десятичных дробей производится так же, как и вычитание натуральных чисел: по разрядам. При этом запятые пишутся друг под другом.

Например: найдём разность чисел 3,51 и 1,489. Выполнить эти вычисления устно сложно, поэтому произведём вычисления в столбик. Уравняем при этом число разрядов в уменьшаемом и вычитаемом, приписав справа нуль в уменьшаемом:

$$\begin{array}{r} \dot{}\ \ \dot{}\ \ \\ -\,3{,}510 \\ \underline{1{,}489} \\ 2{,}021. \end{array}$$

Развиваем умения

Н

1 Выполните сложение:

а) 2,15 + 3,41; в) 50,24 + 8,32; д) 7,19 + 3,01; ж) 0,04 + 4,7;
б) 12,31 + 7,54; г) 1,72 + 18,05; е) 12,3 + 2,17; з) 11,2 + 3,191.

2 Найдите сумму:

а) 2,57 + 4,62; д) 4,72 + 15,61; и) 11,29 + 8,71; н) 11,9 + 9,11;
б) 0,513 + 0,478; е) 0,003 + 2,147; к) 4,071 + 0,32; о) 6,78 + 3,9;
в) 4,28 + 3,12; ж) 2,56 + 2,73; л) 2,22 + 2,022; п) 103,1 + 2,97;
г) 0,315 + 0,026; з) 0,24 + 0,96; м) 4,9 + 2,29; р) 4,64 + 6,46.

3 Проверьте записи и найдите неверные. Исправьте ошибки.

а) $\begin{array}{r} +\,4{,}27 \\ \underline{1{,}5} \\ 4{,}42 \end{array}$
б) $\begin{array}{r} +\,4{,}27 \\ \underline{1{,}5\ } \\ 5{,}32 \end{array}$
в) $\begin{array}{r} +\,4{,}27 \\ \underline{1{,}50} \\ 5{,}77 \end{array}$

4 Вычислите:

а) $12,9 + 6,31$; г) $104,2 + 6,77$; ж) $123,6 + 1,234$;
б) $0,82 + 1,5$; д) $7,356 + 22,54$; з) $10,84 + 5,5$;
в) $4,7 + 0,63$; е) $0,033 + 15,37$; и) $2,11 + 0,099$.

5 а) Представьте число в виде суммы разрядных слагаемых: 0,254; 2,37; 108,009.
Образец: $13,152 = 10 + 3 + 0,1 + 0,05 + 0,002$.
б) Запишите число, представленное в виде суммы разрядных слагаемых:
$0,4 + 0,005 + 0,0001$; $10 + 4 + 0,1 + 0,06$.

6 Найдите разность:

а) $3,45 - 2,01$; в) $50,34 - 8,21$; д) $17,91 - 7,8$; ж) $9,27 - 0,1$;
б) $12,54 - 7,31$; г) $18,75 - 6,43$; е) $0,017 - 0,009$; з) $3,8 - 2,65$.

7 Проверьте записи и найдите неверные. Исправьте ошибки.

а) $$\begin{array}{rcc} & 3, & 4 & 2 \\ - & & 1, & 5 \\ \hline & 4, & 4 & 2 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{rccc} & 3, & 4 & 2 \\ - & 1, & & 5 \\ \hline & 2, & 4 & 3 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{rccc} & 3, & 4 & 2 \\ - & 1, & 5 & 0 \\ \hline & 2, & 9 & 2 \end{array}$$

8 Вычислите:

а) $12,9 - 6,31$; г) $104,2 - 6,77$; ж) $123,6 - 1,234$;
б) $4,82 - 1,05$; д) $22,54 - 7,376$; з) $10,84 - 5,05$;
в) $4,7 - 0,83$; е) $15,033 - 0,37$; и) $2,11 - 0,099$.

9 Найдите разность:

а) $130 - 38,01$; в) $50 - 8,21$; д) $47 - 19,4$; ж) $17,2 - 9,79$;
б) $54 - 7,31$; г) $108 - 62,43$; е) $20,3 - 7,07$; з) $10 - 0,031$.

10 Вычислите, применяя законы сложения и правила раскрытия скобок:

а) $2,48 + 0,19 + 1,12 + 6,81$; г) $4,72 + 15,61 + 0,08 + 0,19$;
б) $0,513 + 0,478 - 0,013$; д) $12 - 2,147 - 0,003$;
в) $5,236 + (3,664 - 2,6)$; е) $4,756 - (2,5 + 1,056)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Вычислите сумму: $5,4 + 0,73$; $0,045 + 11,23$; $4,12 + 0,081$.
б) Вычислите разность: $10,3 - 5,21$; $105,1 - 7,89$; $143,7 - 2,34$.

П **Вариант II.**

а) Вычислите: $0,49 + 0,19 + 1,51$; $12,567 - 2,56 - 0,007$.
б) Вычислите периметр прямоугольника, если его ширина равна 15 дм, а длина на 2,3 дм больше.

Тренировочные упражнения.

Н

11 Вычислите:

а) $1,5 + 4,7$; в) $6,8 - 2,25$; д) $0,2 + 6$; ж) $16,4 + 5,72$;
б) $4,6 - 2$; г) $6 - 0,6$; е) $1,001 - 0,3$; з) $9,17 - 7,8$.

12 Вычислите:

а) $7,12 + 0,57 + 1,08 + 5,53$; в) $6,2 + 7,49 + 1,8 + 1,29$;
б) $16,28 + 5,395 - 1,18$; г) $7,358 + 8,24 - 6,458 - 2,84$.

13 Вычислите по образцу: 1,2 дм + 1,2 см = 1,2 дм + 0,12 дм = 1,32 дм.

а) 12 см + 5,53 дм; г) 6,2 м + 1,29 дм;
б) 12 м − 5,53 дм; д) 6,2 м − 1,29 см;
в) 1,8 дм · 2; е) 4,8 м · 3.

14 а) Вычислите периметр прямоугольника, если его длина равна 15 дм, а ширина на 2,3 дм меньше.

б) Скорость течения реки 4,2 км/ч, а собственная скорость лодки 7,5 км/ч. Определите скорость лодки по течению и против течения.

в) Скорость катера по течению 22,5 км/ч, а против течения 18,5 км/ч. Какова собственная скорость катера?

П

15 а) На числовом луче отмечена точка A (52,96). Найдите координаты точек B и C, если известно, что $AB = 12,387$, $AC = 5,079$ и при этом точка B расположена правее, а точка C – левее точки A.

б) На числовом луче отмечены точки A (17,3) и B (25,9). Найдите координату точки C, если известно, что AC больше AB на 2,85. Найдите все возможные решения.

М

16 Запишите наибольшее и наименьшее возможное число, используя по одному разу цифры 3, 8, 0 и запятую. Найдите сумму и разность этих чисел.

Н

17 Вычислите:

а) $0,45 + 3,55 + 4,38 + 6,5$; в) $7,3 + 7,49 + 2,7 - 1,29$;
б) $15,40 + 5,35 - 0,05$; г) $18,24 - 8,008 - 2,012$.

18 Вычислите по образцу: 1,2 м + 10 см = 1,2 м + 0,01 м = 1,21 м.

а) 9 см + 1,4 мм;

б) 3,4 м + 9 дм;

в) 10 дм − 6,43 см.

П

19 а) Щенок весит 2,5 кг, а котёнок на 1,9 кг меньше. Сколько весят щенок и котёнок вместе?

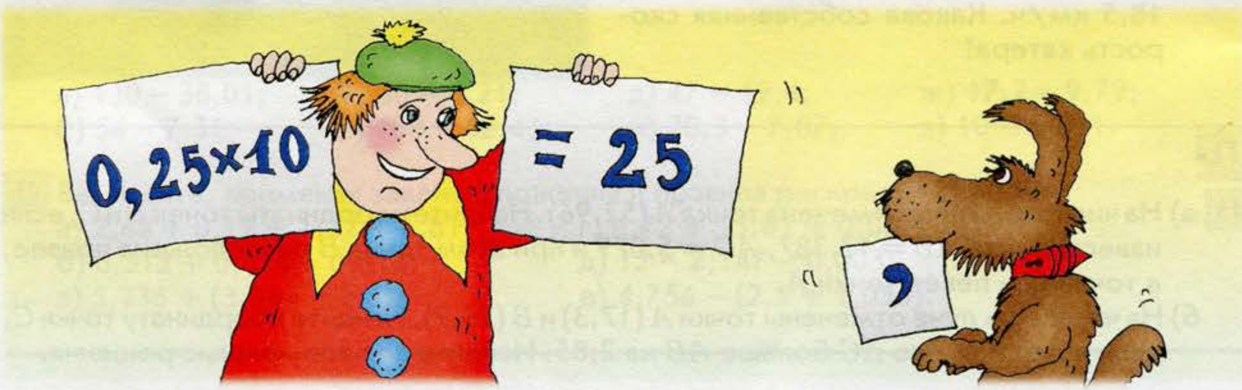
б) Рустэм собрал 12,6 кг яблок – это на 2,8 кг больше, чем собрал Искандер, и на 1,4 кг меньше, чем собрал Феликс. Сколько килограммов яблок они собрали вместе?

в) В кассе была некоторая сумма денег. Поступило в кассу 4 800,50 р., а выдано из кассы 583,80 р. Сколько денег было в кассе первоначально, если после всех операций в ней осталось 11 230,10 р.?

М

20 Как изменятся сумма и разность двух натуральных чисел, если каждое из них увеличить в 10 раз? уменьшить в 10 раз?

2.5 Деление и умножение десятичной дроби на 10, 100, 1 000, ...



Вспоминаем то, что знаем

- Выберите любое натуральное число и умножьте его поочерёдно на 10, 100, 1 000. Чем отличаются записи полученных результатов от записи исходного числа? Что нужно сделать с записью натурального числа, чтобы увеличить его в 10 раз, в 100 раз, в 10^n раз?

Открываем новые знания

- Умножьте число 0,005 поочерёдно на 10, 100, 1 000. Чем отличаются записи полученных результатов от записи исходного дроби?

● Что нужно сделать с записью десятичной дроби, чтобы увеличить её в 10 раз, в 100 раз, в 10^n раз?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Умножим число 2,351 поочерёдно на 10, 100, 1 000.

$$2{,}351 \cdot 10 = \frac{2\,351}{1\,000} \cdot \frac{10}{1} = \frac{2\,351}{100} = 23{,}51$$

$$2{,}351 \cdot 100 = \frac{2\,351}{1\,000} \cdot \frac{100}{1} = \frac{2\,351}{10} = 235{,}1$$

$$2{,}351 \cdot 1\,000 = \frac{2\,351}{1\,000} \cdot \frac{1\,000}{1} = \frac{2\,351}{1} = 2\,351$$

Сравним полученные записи результатов с записью исходной дроби:

$2{,}351 \to 23{,}51 \to 235{,}1 \to 2\,351$.

Мы видим, что от числа к числу меняется положение запятой: при умножении на 10 она сдвигается вправо на один знак, при умножении на 100 – на два знака, при умножении на 1 000 – на три знака.

При умножении десятичной дроби на 10, 100, 1 000 и т.д. достаточно перенести в этой дроби запятую на столько знаков вправо, сколько нулей содержится в множителе.

Это же правило можно сформулировать так: *перенося запятую в записи дроби на n знаков вправо, мы увеличиваем эту дробь в 10^n раз.*

Пользуясь этим правилом, увеличим дробь 2,351 в 100 000 раз:

$2{,}35100 \cdot 100\,000 = 235\,100$.

Обратите внимание: для того чтобы воспользоваться полученным правилом, нам пришлось *приписать к исходной дроби справа два нуля*, так как в данной дроби после запятой только три знака, а в множителе содержится пять нулей.

Вспоминаем то, что знаем

● Разделите число 456 000 поочерёдно на 10, 100, 1 000. Чем отличаются записи полученных результатов от записи исходного числа?

Открываем новые знания

- Разделите число 0,3 поочерёдно на 10, 100, 1 000. Чем отличаются записи полученных результатов от записи исходной дроби?

?!

- Что нужно сделать с записью десятичной дроби, чтобы уменьшить её в 10 раз? в 100 раз? в 10^n раз?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Разделим число 235,1 поочерёдно на 10, 100, 1 000.

$$235{,}1 : 10 = \frac{2\,351}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2\,351}{100} = 23{,}51$$

$$235{,}1 : 100 = \frac{2\,351}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{2\,351}{1\,000} = 2{,}351$$

$$235{,}1 : 1\,000 = \frac{2\,351}{10} \cdot \frac{1}{1\,000} = \frac{2\,351}{10\,000} = 0{,}2351$$

Сравним полученные записи результатов с записью исходной дроби:

$235{,}1 \to 23{,}51 \to 2{,}351 \to 0{,}2351.$

Мы видим, что от числа к числу меняется положение запятой: при делении на 10 она сдвигается влево на один знак, при делении на 100 – на два знака, при делении на 1 000 – на три знака.

Отсюда делаем вывод: при делении десятичной дроби на 10, 100, 1 000 и т.д. достаточно перенести в этой дроби запятую на столько знаков влево, сколько нулей содержится в делителе.

Это же правило можно сформулировать так: *перенося запятую в записи дроби на n знаков влево, мы уменьшаем эту дробь в 10^n раз.*

Пользуясь этим правилом, уменьшим дробь 235,1 в 100 000 раз.

Для этого нужно перенести запятую в записи дроби на 5 знаков влево. Но после переноса запятой на 3 знака влево мы обнаружим, что левее цифр уже нет, а нам надо перенести запятую влево ещё на два знака. В таком случае перед самой левой цифрой дописывают необходимое количество нулей. Нуль также ставят и перед запятой:

$00235{,}1 : 100\,000 = 0{,}002351.$

Н

1 Как изменится дробь, если запятую в её десятичной записи:

а) перенести на 2 цифры вправо;
б) перенести на 5 цифр влево;
в) перенести сначала на 3 цифры вправо, а затем на 2 цифры влево?

2 Как изменится положение запятой в записи десятичной дроби, если эту дробь:

а) увеличить сначала в 10 раз, а потом ещё в 100 раз;
б) уменьшить сначала в 100 раз, а потом ещё в 10 раз;
в) сначала увеличить в 10 раз, а потом уменьшить в 100 раз?

3 Какое число больше и во сколько раз:

а) 51,675 или 516,75; б) 3 954,2 или 3,9542?

4 Какое число меньше и во сколько раз:

а) 17,68 или 1,768; б) 1,2345 или 123,45?

5 а) Увеличьте каждую дробь в 10, 100, 1 000 раз: 4,1567; 0,456; 0,060; 0,002.
б) Уменьшите каждую дробь в 10, 100, 1 000 раз: 4156,7; 45,6; 6,5; 0,02.

6 Выразите в килограммах:

а) 1,540 ц; 15,40 ц; 154,2 ц;
б) 154,2 т; 15,40 т; 1,540 т;
в) 1542 г; 154,0 г; 15,4 г.

7 Выразите

а) в кубических метрах: 7 054 дм^3; 705,4 дм^3; 70 540 см^3;
б) в кубических миллиметрах: 7,054 см^3; 7,054 дм^3.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Увеличьте в 10,100,1 000 раз дробь 0,067. Уменьшите в 10,100,1 000 раз дробь 6,7.
б) Выразите в метрах: 150 см; 1,5 см; 0,15 см.

П **Вариант II.**

а) Представьте в виде натурального числа 1,2 тыс. и 1,2 млн.
б) Выразите в квадратных метрах: 1,5 а; 1,5 га.

Тренировочные упражнения.

Н

8 На какое число нужно умножить или разделить число 32,5, чтобы в результате получилось:

а) 3 250; б) 32,5; в) 325; г) 0,0325; д) 32 500?

9 Представьте в виде натурального числа:

а) 1,5 тыс.; 1,5 млн; 1,5 млрд;
б) 0,9 тыс.; 0,9 млн; 0,9 млрд;
в) 0,05 тыс.; 0,05 млн; 0,05 млрд;
г) 0,001 тыс.; 0,001 млн; 0,001 млрд.

10 Выразите

а) в метрах: 3,125 км; 2,5 км; 0,25 км;
б) в миллиметрах: 10,5 м; 0,5 м; 0,01 м;
в) в миллилитрах: 1,205 л; 0,125 л; 12,05 л.

11 Выразите

а) в метрах: 125 см; 2,5 см; 0,25 см;
б) в сантиметрах: 10,5 мм; 5 мм; 0,05 мм;
в) в литрах: 1 205 мл; 12,5 мл; 0,205 мл.

12 Выразите

а) в квадратных километрах: 1 254 га; 1 254 а;
б) в квадратных сантиметрах: 4,754 дм^2; 54 мм^2.

П

13 Объясните, на чём основано рассуждение: $0,3 \cdot 10 = 3$, поэтому $0,3 \cdot 20 = 6$. Исходя из этого рассуждения, найдите значение выражения: $1,2 \cdot 80$.

М

14 Известно, что $125 \cdot 8 = 1\,000$. Найдите истинное высказывание:
а) $1,25 \cdot 0,8 = 100$; б) $1,25 \cdot 0,8 = 10$; в) $1,25 \cdot 0,8 = 1$.
Объясните свой выбор.

Н

15 а) Увеличьте каждую дробь в 10, 100, 1 000 раз: 8,9067; 0,573; 0,078; 0,004.
б) Уменьшите каждую дробь в 10, 100, 1 000 раз: 975,8; 63,6; 8,3; 0,01.

16 Выразите
а) в килограммах: 1,45 ц; 0,54 т; 450 г;
б) в граммах: 4,5 кг; 0,06 кг; 0,009 кг.

17 а) За 100 одинаковых ручек заплатили 1,25 тыс. р. Сколько надо заплатить за 10 таких ручек?

б) За 10 одинаковых автомобилей заплатили 5,4 млн р. Сколько надо заплатить за 20 таких же автомобилей? за 200? Выразите ответ в рублях.

П

18 Убедитесь в верности равенств: $3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$; $3 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$. Найдите значение выражения: $1{,}2 \cdot 0{,}001$. Сформулируйте правило умножения числа на 0,1; 0,01; 0,001.

19 Сравните ($>$; $<$; $=$):

а) $563 \cdot 70 * 563 \cdot 7$; б) $563 \cdot 70 * 56{,}3 \cdot 70$; в) $563 \cdot 7 * 56{,}3 \cdot 0{,}7$; г) $56{,}3 \cdot 70 * 563 \cdot 7$.

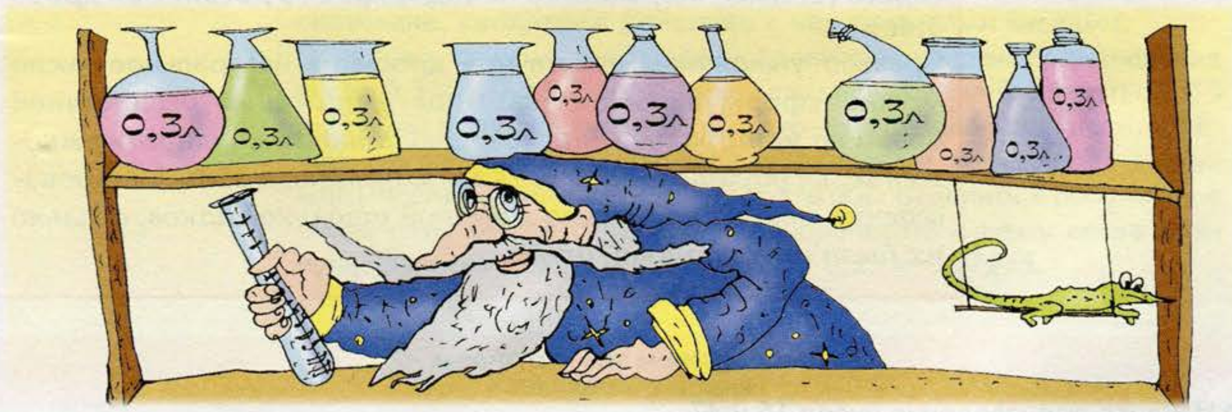
М

20 Известно, что $1\,000 : 8 = 125$. Найдите истинное высказывание:

а) $1 : 0{,}8 = 1{,}25$; б) $1 : 0{,}8 = 0{,}0125$; в) $1 : 0{,}8 = 0{,}125$.

Объясните свой выбор.

2.6 Умножение десятичной дроби на натуральное число. Умножение десятичных дробей



Вспоминаем то, что знаем

- Найдите произведение чисел 24 и 63.

Открываем новые знания

- Найдите произведение чисел 0,24 и 63. Сравните полученное произведение с произведением чисел 24 и 63. Как найти произведение чисел 0,24 и 63, не заменяя десятичную дробь обыкновенной?

● Как умножить десятичную дробь на натуральное число, не заменяя десятичную дробь обыкновенной?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Найдём произведение чисел 346 и 52. Это число 17 992.
Найдём произведение чисел 3,46 и 52. Это число 179,92.

$$\left(3{,}46 \cdot 52 = 3\frac{46}{100} \cdot \frac{52}{1} = \frac{346 \cdot 52}{100} = \frac{17\,992}{100} = 179\frac{92}{100} = 179{,}92\right).$$

Сравним эти произведения: второе (179,92) в 100 раз меньше первого (17 992). Почему? Вам уже известна следующая зависимость: произведение увеличивается или уменьшается во столько же раз, во сколько раз увеличивается или уменьшается один из множителей, если второй множитель остаётся неизменным.

Действительно, в первом произведении содержится множитель 346, во втором – 3,46, а второй множитель в обоих произведениях одинаковый (52). Число 3,46 в 100 раз меньше числа 346.

Сделаем вывод: перемножить числа 3,46 и 52 – это то же самое, что перемножить натуральные числа 346 и 52, а затем уменьшить полученное произведение в 100 раз. Уменьшить число в 100 раз – это значит отделить в нём запятой две цифры справа (столько же, сколько их содержится в десятичной дроби 3,46).

Правило умножения десятичной дроби на натуральное число можно сформулировать так: *при умножении десятичной дроби на натуральное число сначала надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, а затем в произведении отделить справа запятой столько знаков, сколько их было в десятичной дроби.*

Вспоминаем то, что знаем

● Найдите произведение чисел 15 и 47.

Открываем новые знания

● Найдите произведение чисел 0,15 и 4,7. Сравните полученный результат с произведением чисел 15 и 47. Как найти произведение чисел 0,15 и 4,7, не заменяя их обыкновенными дробями?

● Как умножают десятичные дроби, не заменяя их обыкновенными дробями?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Умножение десятичных дробей

Найдём произведение чисел 346 и 52. Это число 17 992.
Найдём произведение чисел 3,46 и 5,2. Это число 17,992.

$$\left(3,46 \cdot 5,2 = 3\frac{46}{100} \cdot 5\frac{2}{10} = \frac{346 \cdot 52}{1\,000} = \frac{17\,992}{1\,000} = 17\frac{992}{1\,000} = 17,992\right).$$

Сравним эти произведения: второе (17,992) в 1 000 раз меньше первого (17 992). Почему? Во втором произведении содержится множитель 3,46, в первом — 346. Число 3,46 в 100 раз меньше числа 346.

Во втором произведении содержится множитель 5,2, в первом — 52. Число 5,2 в 10 раз меньше числа 52.

Сделаем вывод: перемножить числа 3,46 и 5,2 — это то же самое, что перемножить натуральные числа 346 и 52, а затем уменьшить полученное произведение в 1 000 раз (в 100 и ещё в 10). Уменьшить число в 1 000 раз — это значит отделить в нём запятой три цифры справа (столько же, сколько их содержится *в обоих множителях вместе*).

Правило умножения десятичных дробей можно сформулировать так: *при умножении десятичных дробей сначала надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а затем в произведении отделить справа запятой столько знаков, сколько их было в обоих множителях вместе.*

Таким образом, умножение десятичных дробей так же, как и сложение, сводится к действию с натуральными числами.

Пользуясь сформулированным правилом, найдём произведение чисел 0,315 и 0,23. Перемножив эти числа без учёта запятых (315 и 23), мы получим число 7 245. Это четырёхзначное число, а общее число знаков после запятой, которые содержатся в двух множителях, равно пяти. Для того чтобы отделить в полученном числе пять знаков справа, нужно приписать к нему слева один нуль. Записываем результат: $0,315 \cdot 0,23 = 0,07245$.

Развиваем умения

Н

1 Вычислите значение первого выражения в каждой группе. Назовите значения остальных выражений, не делая вычислений.

а) $15 \cdot 4$;	б) $25 \cdot 4$;	в) $27 \cdot 3$;	г) $19 \cdot 5$;
$1,5 \cdot 4$;	$0,25 \cdot 4$;	$2,7 \cdot 3$;	$1,9 \cdot 0,5$;
$15 \cdot 0,4$;	$25 \cdot 0,04$;	$0,27 \cdot 0,3$;	$0,19 \cdot 5$;
$1,5 \cdot 0,4$;	$2,5 \cdot 0,04$;	$0,027 \cdot 0,03$;	$0,019 \cdot 0,5$.

2 Вычислите:

а) $31{,}54 \cdot 32$; б) $60{,}5 \cdot 4{,}8$; в) $61 \cdot 3{,}245$; г) $3{,}005 \cdot 44{,}44$.

3 Вычислите и сравните значения выражений в каждой паре. Расскажите, какую закономерность вы заметили. Объясните эту закономерность. Придумайте и найдите значения произведений, где одним из множителей будут числа 0,0001; 0,00001; 0,000001.

а) $72{,}5 \cdot 0{,}1$; $72{,}5 : 10$;
б) $135{,}6 \cdot 0{,}01$; $135{,}46 : 100$;
в) $4\,568{,}2 \cdot 0{,}001$; $4\,568{,}2 : 1\,000$.

4 Вычислите и сравните значения выражений в каждой паре. Расскажите, какую закономерность вы заметили.

а) $72 \cdot 0{,}5$; $72 : 2$; г) $88 \cdot 0{,}125$; $88 : 8$;
б) $132 \cdot 0{,}25$; $132 : 4$; д) $350 \cdot 0{,}02$; $350 : 50$;
в) $145 \cdot 0{,}2$; $145 : 5$; е) $625 \cdot 0{,}04$; $625 : 25$.

5 Найдите значения выражений устно, применяя законы арифметических действий.

а) $32{,}49657 \cdot 0{,}5 \cdot 2$; в) $125 \cdot 967{,}754 \cdot 0{,}008$; д) $125 \cdot 0{,}2 \cdot 123{,}89 \cdot 0{,}4$;
б) $0{,}25 \cdot 78{,}9876 \cdot 4$; г) $2{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 50 \cdot 0{,}02$; е) $1{,}25 \cdot 500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}08$.

6 Найдите значения выражений устно, применяя законы арифметических действий.

а) $115 \cdot 0{,}5 + 85 \cdot 0{,}5$; в) $15 \cdot 0{,}25 + 25 \cdot 0{,}25$;
б) $0{,}69 \cdot 20 - 0{,}19 \cdot 20$; г) $170 \cdot 0{,}125 - 90 \cdot 0{,}125$.

7 Вычислите:

а) $7{,}5 \cdot 0{,}4 + 3{,}2 \cdot 0{,}17$; г) $7{,}1 \cdot 1{,}3 - 0{,}19 \cdot 5{,}02$;
б) $4{,}28 \cdot 0{,}2 - 1{,}7 \cdot 0{,}3$; д) $(62 - 14{,}8) \cdot (34 - 0{,}175) - 961{,}9196$;
в) $0{,}8 \cdot 3{,}15 + 0{,}18 \cdot 3{,}6$; е) $32{,}05 \cdot (28{,}03 + 11{,}5) - 1\,266{,}9365$.

8 Из двух городов одновременно навстречу друг другу вышли два грузовика. Скорость первого – 50,6 км/ч, а скорость второго – на 7,6 км/ч больше. Чему равно расстояние между этими городами, если грузовики встретились через 0,5 ч?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Вычислите рациональным способом: $5 \cdot 10 \cdot 0{,}2$; $16 \cdot 4 \cdot 0{,}25$.
б) Вычислите: $3{,}55 \cdot 6$; $6{,}71 \cdot 23$; $44{,}4 \cdot 2{,}2$.

П **Вариант II.**

а) Вычислите рациональным способом: $8 \cdot 0{,}5$; $16 \cdot 0{,}25$.
б) Вычислите: $14{,}25 \cdot 6{,}04$; $0{,}81 \cdot 1{,}033$.

Тренировочные упражнения.

Н

9 Убедитесь, что множители в каждом из этих произведений – взаимно обратные числа.

а) $0,8 \cdot 1,25$; б) $2,5 \cdot 0,4$; в) $50 \cdot 0,02$.

10 Вычислите:

а) $0,04 \cdot 100 \cdot 0,25 + 2,5 \cdot 0,4$; в) $6,25 \cdot 0,16 + 46,002 \cdot 2,9$;
б) $3,75 \cdot 20,5 - 0,05 \cdot 200$; г) $71,2 \cdot 0,2 - 3,125 \cdot 0,32$.

11 Вычислите:

а) $0,07 \cdot 100 \cdot 0,23 + 0,25 \cdot 16,5$; в) $(5,004 + 0,806) \cdot (9 - 3,2)$;
б) $(0,48 + 0,36) \cdot 4,05 - 1,002$; г) $(8,8 \cdot 0,45 - 2,16) \cdot 0,12$.

12 На соревнованиях по техническому моделированию с одной и той же точки прямолинейной трассы одновременно стартовали в одном направлении две машинки. Скорость первой машинки – 72 км/ч, а скорость второй – 63 км/ч. На какое расстояние через 5 с после старта вторая машинка отстанет от первой?

П

13 Проверьте, что числа каждой пары являются взаимно обратными. Найдите ещё несколько пар взаимно обратных чисел.

а) 6,25 и 0,16; б) 3,125 и 0,32; в) 0,15625 и 6,4.

М

14 Турист шёл пешком полтора часа. Первые полчаса он шёл со скоростью 5,4 км/ч, затем 48 мин со скоростью 4,5 км/ч, а оставшееся время со скоростью 5 км/ч. Какое расстояние прошёл турист за эти полтора часа?

Н

15 Вычислите устно:

а) $2 \cdot 3,9 \cdot 0,5$; г) $7,3 \cdot 5 + 2,7 \cdot 5$;
б) $4 \cdot 7,8 \cdot 0,25$; д) $4,2 \cdot 1,5 + 4,2 \cdot 0,5$;
в) $0,21 \cdot 8 \cdot 0,5$; е) $0,4 \cdot 58,6 + 58,6 \cdot 0,6$.

16 Вычислите:

а) $(0,08 \cdot 0,17 + 6,1009) \cdot 21,5 - 130,889$;
б) $30,6 - 4,7 \cdot (5,5 - 4,08 - 0,19)$;
в) $0,24 \cdot (3\,000 - 2\,974,5) + 0,078 \cdot 240$.

17 а) Цена одного метра атла́са – 42,8 р., а метр шёлка на 4,78 р. дешевле. Хватит ли 900 р. на покупку 9,75 м атласа и 10,5 м шёлка?

б) Хватит ли 56 м ковровой дорожки для трёх коридоров, имеющих длину 27,4 м, 25,8 м, 13,7 м? Если не хватит, то сколько метров?

П

18 Заполните таблицу.

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n^2									

Вычислите:

а) $1{,}9^2$; $1{,}5^2$; $1{,}8^2$;

б) $0{,}11^2$; $0{,}17^2$; $0{,}14^2$;

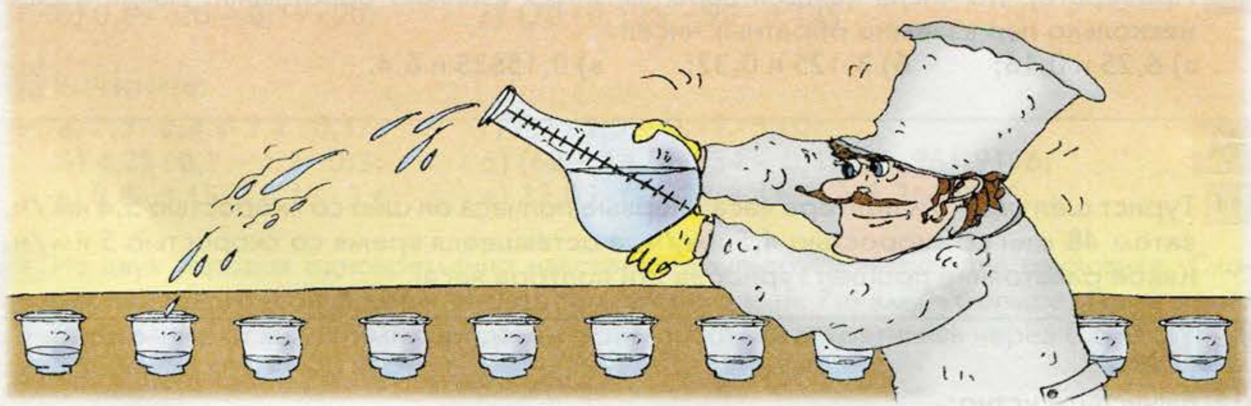
в) $0{,}012^2$; $0{,}016^2$; $0{,}013^2$.

М

19 а) Найдите число, квадрат которого равен: 0,64; 0,01; 0,0009.

б) Найдите число, куб которого равен: 0,064; 0,008; 0,125.

2.7 Деление десятичной дроби на натуральное число. Деление десятичных дробей



Вспоминаем то, что знаем

- Выполните письменное деление чисел 1 554 и 2.

Открываем новые знания

- Как найти частное чисел 15,54 и 2?

?!

- Как разделить десятичную дробь на натуральное число?

Вы уже знаете, что действия сложения, вычитания и умножения с десятичными дробями похожи на действия с натуральными числами.

Основное отличие арифметических действий с десятичными дробями по сравнению с действиями с натуральными числами заключается в необходимости специального правила для определения места запятой в полученном результате. Такое правило понадобится и для деления.

Пример 1. Разделим десятичную дробь 34,75 на натуральное число 5.

Сначала сделаем это, пользуясь свойствами операции деления:

$34{,}75 : 5 = (30 + 4{,}5 + 0{,}25) : 5 = 30 : 5 + 4{,}5 : 5 + 0{,}25 : 5 = 6 + 0{,}9 + 0{,}05 = 6{,}95.$

Теперь выполним деление в столбик, действуя в соответствии с теми же алгоритмами, что и при делении натуральных чисел.

$$\begin{array}{r|l} -34{,}75 & 5 \\ \underline{30} & \overline{6{,}95} \\ -47 & \\ \underline{45} & \\ -25 & \\ \underline{25} & \\ 0 & \end{array}$$

Сначала разделили на 5 число 34 – целую часть дроби 34,75; получили в частном 6 единиц, после этого в частном поставили запятую. В остатке получили 4 целых, приписали к ним 7 десятых, получили 47 десятых, разделили их на 5, получили в частном 9 десятых. В остатке получили 2 десятых, приписали к ним 5 сотых, получили 25 сотых, разделили их на 5, получили в частном 5 сотых. Нуль в остатке означает, что деление закончено.

Частное чисел 34,75 и 5 равно 6,95.

Правило деления десятичной дроби на натуральное число можно сформулировать так: *деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как и деление натуральных чисел. После того как закончено деление целой части, в частном ставят запятую.*

Рассмотрим несколько отдельных случаев деления.

Пример 2. Найдём частное чисел 1,15 и 5.

$$\begin{array}{r|l} -1{,}15 & 5 \\ \underline{1\;0} & \overline{0{,}23} \\ -15 & \\ \underline{15} & \\ 0 & \end{array}$$

Целая часть делимого равна 1; она меньше делителя. Поэтому в частном записали 0 целых, после чего поставили запятую и продолжили деление. Результат: $1{,}15 : 5 = 0{,}23$.

Пример 3. Найдём частное чисел 24,4 и 8. Когда все цифры делимого 24,4 были снесены, ноль в остатке не получился: следовало продолжить деление. Мы знаем, что десятичная дробь не изменится, если к ней справа приписать нули, поэтому приписывали к делимому нуль и находили следующие цифры частного до тех пор, пока в остатке не получили нуль. Результат: $24{,}4 : 8 = 3{,}05$.

$$\begin{array}{r|l} -24{,}40 & 8 \\ \underline{24} & 3{,}05 \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Обратите внимание, запись может быть сделана иначе: нули можно приписывать не к делимому, а непосредственно к остаткам, получающимся в процессе деления.

$$\begin{array}{r|l} -24{,}4 & 8 \\ \underline{24} & 3{,}05 \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Пример 4. Найдём частное чисел 300 и 8. Разделив 300 на 8, получили в частном 37 и в остатке 4. После этого продолжили деление, приписав к остатку 0.

Результат: $300 : 8 = 37{,}5$.

$$\begin{array}{r|l} -300 & 8 \\ \underline{24} & 37{,}5 \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Иногда при делении получается бесконечная десятичная дробь.

Пример 5. Найдём частное чисел 2 и 3. Разделив 2 на 3, получили в частном 0 и в остатке 2. Далее на каждом этапе вычисления получается один и тот же остаток 2, а в частном – одна и та же цифра 6. Процесс этот бесконечен, он приводит к выражению 0,666..., где многоточие показывает, что цифра 6 повторяется бесконечно много раз. Значит, деление не закончится, сколько бы мы его ни продолжали. При этом частное чисел 2 и 3 существует: $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Его можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{2}{3}$, но нельзя записать в виде конечной десятичной дроби.

$$\begin{array}{r|l} -2{,}0 & 3 \\ \underline{1\ 8} & 0{,}666\ldots \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ 2\ldots & \end{array}$$

Вспоминаем то, что знаем

- Найдите и сравните частные $25 : 5$ и $250 : 50$.

Открываем новые знания

- Найдите и сравните частные $44{,}8 : 2{,}8$ и $448 : 28$.

● Почему частные равны? Как обнаруженную закономерность можно использовать для упрощения деления десятичных дробей?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Найдём частное чисел 1 225 и 49. Это число 25.

Найдём частное чисел 122,5 и 4,9. Это число 25, поскольку, переходя к обыкновенным дробям, получим

$$122{,}5 : 4{,}9 = 122\frac{5}{10} : 4\frac{9}{10} = \frac{1\,225}{10} : \frac{49}{10} = \frac{1\,255 \cdot 10}{10 \cdot 49} = \frac{1\,255}{49} = 25.$$

Сравним эти частные. Они равны. Почему? Во втором частном и делимое, и делитель в 10 раз меньше, чем делимое и делитель в первом частном. Вам уже известна следующая зависимость: частное не меняется при уменьшении или увеличении делимого и делителя в одинаковое число раз.

Используя эту зависимость, мы можем увеличить делимое и делитель в одинаковое число раз так, чтобы делитель стал натуральным числом.

Правило деления десятичных дробей можно сформулировать так: *при делении числа на десятичную дробь нужно и в делимом, и в делителе перенести запятую на столько знаков вправо, сколько их содержится после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.*

При переносе запятой в делимом может возникнуть ситуация, когда придётся приписать справа нужное количество нулей.

Например: разделим 4,2 на 0,06. Для того чтобы превратить делитель в натуральное число, нужно увеличить его в 100 раз или, говоря иначе, перенести запятую на два знака вправо. Так же следует увеличить делимое.

Поэтому: $4{,}2 : 0{,}06 = 420 : 6 = 70.$

Внимание! Рассмотрим ещё один случай деления с десятичными дробями. Если дробь 0,05 разделить на дробь 0,3 «уголком», то мы получим бесконечную дробь.

$$\begin{array}{r|l} -0{,}5 & 3 \\ \underline{0} & 0{,}166\ldots \\ -5 & \\ \underline{3} & \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ -20 & \\ \underline{18} & \\ 2\ldots & \end{array}$$

Но если перейти к обыкновенным дробям, то получим:

$$0{,}05 : 0{,}3 = \frac{5}{100} : \frac{3}{10} = \frac{5}{100} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Подробнее об этом будет сказано позже.

Н

1 Выполните деление. В случае затруднения найдите похожий случай деления на стр. 69–71 и выполните деление по образцу.

а) 17,15 : 7; б) 224,4 : 11; в) 16,25 : 5; г) 7,47 : 3; д) 477,4 : 14.

2 Выполните деление. В случае затруднения найдите похожий случай деления на стр. 69–71 и выполните деление по образцу.

а) 8,28 : 9; б) 10,71 : 21; в) 0,115 : 5; г) 0,084 : 7; д) 4,65 : 15.

3 Выполните деление. В случае затруднения найдите похожий случай деления на стр. 69–71 и выполните деление по образцу.

а) 5,87 : 2; б) 13,8 : 15; в) 19,6 : 16; г) 44, 5 : 4; д) 10,63 : 2.

4 Выполните деление. В случае затруднения найдите похожий случай деления на стр. 69–71 и выполните деление по образцу.

а) 157 : 2; б) 490 : 4; в) 531 : 15; г) 33 : 60; д) 304 : 5.

5 Найдите частное и, если возможно, выразите ответ десятичной дробью. В противном случае выразите ответ обыкновенной дробью.

а) 3 : 20; б) 5 : 16; в) 8 : 12; г) 4 : 11; д) 0,04 : 1,2; е) 0,33 : 0,9; ж) 3 : 1,2.

6 Вычислите устно. Сделайте проверку умножением.

а) 0,9 : 3;	г) 4,2 : 3;	ж) 0,54 : 2;	к) 0,52 : 4;
б) 2,4 : 8;	д) 3,4 : 2;	з) 0,75 : 5;	л) 0,84 : 7;
в) 4,5 : 9;	е) 0,91 : 7;	и) 9,8 : 2;	м) 4,2 : 14.

7 Вычислите устно:

а) 12 : 0,4;	г) 0,5 : 0,25;	ж) 1,4 : 0,07;	к) 5,6 : 0,08;
б) 15 : 0,3;	д) 1,2 : 0,02;	з) 3,9 : 0,13;	л) 4,8 : 0,24;
в) 36 : 0,6;	е) 0,4 : 0,004;	и) 0,64 : 0,8;	м) 0,84 : 1,4.

8 Выполните деление:

а) 17,4 : 0,3;	г) 512 : 0,16;	ж) 0,2106 : 3,9;	к) 468 : 3 600;
б) 30,6 : 0,6;	д) 198 : 0,036;	з) 0,04 : 2,5;	л) 27 : 25;
в) 6,25 : 2,5;	е) 1 050 : 4,2;	и) 3,534 : 0,5;	м) 94 : 400.

9 а) Печенье разложили поровну в 4 коробки. Сколько печенья в каждой коробке, если всего было 3,6 кг печенья?

б) Из 9,5 м ткани можно сшить 5 одинаковых платьев. Сколько ткани потребуется, чтобы сшить 3 таких же платья? Десять таких же платьев?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Выполните деление: 882 : 36; 14,985 : 45; 88 : 0,45; 12,5 : 0,125.

б) Решите уравнения: $4x = 2{,}12$; $5x = 0{,}0095$.

П **Вариант II.**

а) Вычислите: 8 : 0,5; 16 : 0,25 · 4; 19,44 : 7,2.
б) Решите уравнения: $3{,}5x = 42$; $0{,}024x = 3{,}6$.

Тренировочные упражнения.

Н

10 Вычислите устно:

а) 10 : 0,2;	г) 0,3 : 0,03;	ж) 25 : 0,5;	к) 0,24 : 0,6;
б) 16 : 0,8;	д) 1,5 : 0,05;	з) 34 : 0,17;	л) 5,6 : 0,07;
в) 32 : 0,8;	е) 0,08 : 0,02;	и) 64 : 3,2;	м) 420 : 0,21.

11 Вычислите и сравните значения выражений в каждой паре. Расскажите, какую закономерность вы заметили. Объясните, на чём основана эта закономерность. Придумайте выражения, где делителями будут числа 0,0001; 0,00001; 0,000001, и найдите их значения.
а) 72,5 : 0,1; 72,5 · 10;
б) 135, 6 : 0,01; 135,46 · 100;
в) 4 568,2 : 0,001; 4 568,2 · 1 000.

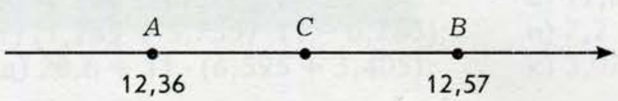
12 Найдите значение выражения:

а) 4,96 : 10 + 35,8 : 100 − 0,0042;	г) 4,8 : 12 + 7,5 : 15 + 0,9;
б) 72,492 : 12 + 78,156 : 36 − 123,03 : 15;	д) (0,84 : 14 − 0,96 : 16) : 36;
в) (0,04 + 3,59) · (7,35 + 2,65) : 300;	е) (9 : 0,03 − 16 : 0,2) : 0,016.

13 Решите уравнения:

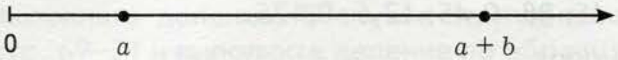
а) $5x = 3{,}15$;	г) $9x - 3x = 10{,}2$;	ж) $18x = 4{,}2 + 4x$;
б) $23x = 22{,}747$;	д) $3x + 17x = 165$;	з) $33x = 56 - 7x$;
в) $3x = 0{,}0087$;	е) $2x + 2x = 6$;	и) $19x + 36 = 37x$.

14 Точка C – середина отрезка AB. Найдите её координату. Найдите среднее арифметическое чисел 12,36 и 12,57. Сравните полученный результат с координатой точки C.



П

15 Сравните a и b.



Н

16 Вычислите устно:

а) $5,9 : 10$; д) $67 \cdot 0,1$; и) $90 \cdot 0,5$; н) $90 \cdot 0,6$;
б) $5,9 \cdot 10$; е) $67 : 0,1$; к) $90 : 0,5$; о) $90 : 0,6$;
в) $0,008 : 100$; ж) $98,5 \cdot 0,01$; л) $120 \cdot 0,2$; п) $2,4 \cdot 0,4$;
г) $0,008 \cdot 100$; з) $98,5 : 0,01$; м) $120 : 0,2$; р) $2,4 : 0,4$.

17 Решите уравнения:

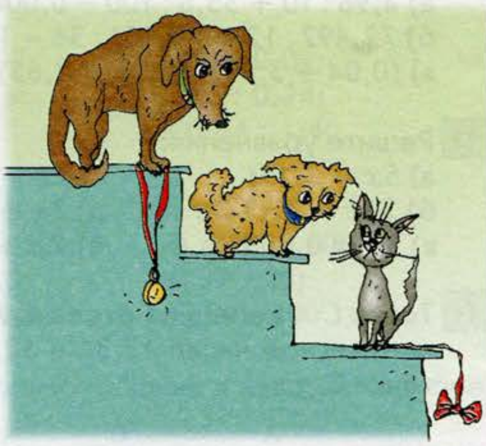
а) $19x - 0,18 = 19,01$; г) $3,2x + 5,6 + 5,8x = 17,21$;
б) $2,27 - 2x = 0,09$; д) $3x + 1,2x + 6,7x = 109$;
в) $5,08 + 12x = 29,74$; е) $6,7x + 1,9x + 3,3x = 38,08$.

18 Вычислите:

а) $103,6 : 28 - 2,07$; г) $0,88 \cdot 0,45 + 26,64 : 111$;
б) $14,18 + 8,32 : 16$; д) $0,96 : 12 - 0,32 \cdot 0,05$;
в) $1 - 0,224 : 8$; е) $0,16 \cdot 240 - 360 : 75$.

19 а) Сеттер весит 54,5 кг. Болонка легче сеттера в 5 раз, а кошка легче сеттера в 10 раз. Сколько весит болонка и сколько кошка?

б) В первом бидоне в 3 раза больше молока, чем во втором, а во втором – в 2 раза больше, чем в третьем. Сколько молока во втором бидоне и сколько в третьем, если в первом 4,5 л молока?



П

20 Расположите в порядке возрастания числа $2a$, $2b$ и $a + b$.

2.8 Вычисления с десятичными дробями

Повторяем, обобщаем знания

- Вспомните, как найти значение выражений: $4{,}56 + 13{,}0007$; $5{,}670 - 3{,}5$.
- Вспомните правила сложения и вычитания десятичных дробей и приведите различные примеры.
- Вспомните, как найти значение выражений: $4{,}56 \cdot 13$; $4{,}56 \cdot 1{,}3$.
- Вспомните правила умножения десятичных дробей и приведите различные примеры.
- Приведите примеры, связанные с делением десятичных дробей на натуральное число.
- Вспомните правило деления на десятичную дробь и приведите примеры.

Развиваем умения

Н

1 Вычислите устно:

а) $1{,}2 + 3{,}5$;
б) $0{,}09 + 0{,}11$;
в) $1\,000 \cdot 0{,}015$;
г) $90 \cdot 0{,}1$;
д) $90 : 0{,}1$;
е) $1 - 0{,}6$;
ж) $0{,}29 \cdot 100$;
з) $0{,}001 \cdot 72$;
и) $0{,}4 \cdot 0{,}6$;
к) $0{,}42 + 1{,}08$;
л) $2{,}18 - 1{,}08$;
м) $60 : 0{,}2$;
н) $8 \cdot 1{,}5$;
о) $592 : 100$;
п) $0{,}098 \cdot 100$.

2 Вычислите:

а) $15 \cdot (3{,}7 + 1{,}23)$;
б) $(6{,}43 + 4{,}97) \cdot 39$;
в) $(2{,}027 - 0{,}34) : 10$;
г) $(1{,}265 + 5{,}735) \cdot (1 - 0{,}785)$;
д) $28{,}6 + 11 \cdot (6{,}595 + 3{,}405)$;
е) $4{,}92 - (0{,}025 + 0{,}001) : 0{,}01$;
ж) $5{,}64 + 9{,}036 : 1{,}8 - 0{,}86$;
з) $19{,}02 - 0{,}85 \cdot 4{,}24 + 4{,}584$;
и) $7{,}2 - 4{,}06 + 3{,}15 : 0{,}6$;
к) $3{,}078 : (5{,}1 - 1{,}05) + 0{,}24$.

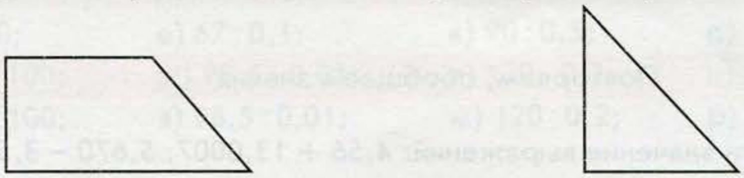
3 Решите задачи на сложение и вычитание.

а) Для приготовления крема взяли 2,3 кг сахарной пудры, 2,5 кг сметаны и 4,7 кг сливок. Сравните массы взятых продуктов и узнайте, на сколько больше (меньше) масса сметаны, чем масса сахарной пудры и сливок.

б) В два одинаковых ящика насыпано разное количество картофеля. Их общая масса с картофелем составляет 43,5 кг. Масса этих же пустых ящиков составляет 4,6 кг. Сколько килограммов картофеля находится во втором ящике, если в первом – 18 кг?

в) Скорость движения катера против течения реки 19,5 км/ч, а скорость течения реки – 1,6 км/ч. Чему равна скорость катера в стоячей воде и его скорость по течению реки?

г) Выполните измерения и вычислите периметры изображённых фигур.



д) Вычислите длину неизвестной стороны треугольника, если его периметр равен 42,9 см, а длины двух других сторон равны 18,7 см и 13,6 см.

4 Решите задачи.

а) На участке, засеянном пшеницей, получили с 1 га по 27,8 ц пшеницы. Сколько пшеницы получили с 3 га, 4 га, 0,8 га, 0,2 га этого участка?

б) Один килограмм крупы стоит 25 р. 50 к. Сколько надо заплатить за 2 кг, 1,5 кг, 0,45 кг, 0,75 кг, 800 г, 350 г такой крупы?

в) Участок поля площадью 11,2 га был засеян рожью по 2,3 ц на 1 га, а участок площадью 7,2 га был засеян рожью по 2,25 ц на 1 га. Сколько осталось ржи, если на посев было закуплено 10 т?

г) Вычислите площадь и периметр прямоугольника, если одна сторона его равна 7,85 м, а другая – в 4 раза длиннее.

5 Решите задачи.

а) На прямолинейном участке железнодорожного пути уложены рельсы, длина каждого из которых 12,5 м. Сколько рельсов уложено на 300 м пути?

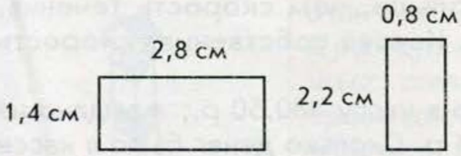
б) Вычислите скорость движения пешехода, который за 2,4 ч прошёл 10,8 км.

в) На производство 1 т бумаги расходуется 250 т воды. Это в 12,5 раза больше, чем расходуется на производство 1 т стали, и в 6 раз меньше, чем на производство 1 т аммиака. Сколько тонн воды расходуется на производство 1 т стали и сколько – на производство 1 т аммиака?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Найдите периметр каждого прямоугольника на чертеже.



П Вариант II.

Известно, что с поля прямоугольной формы, стороны которого 0,06 км и 0,5 км, убрали капусту. Урожай капусты с 1 га составил 40 т. Какой урожай собрали с этого поля?

Тренировочные упражнения.

Н

6 а) Сколько минут содержится в 1,2 ч; 0,8 ч; 0,75 ч; 0,3 ч?

б) Скорость катера в стоячей воде – 15,3 км/ч, а скорость течения реки – 1,5 км/ч. Катер двигался сначала 2 ч вверх по реке, а потом 3 ч вниз. Сколько километров он прошёл за это время?

в) Длина поля прямоугольной формы – 625 м, а ширина – на 177 м меньше. Урожайность зерна на этом поле составляет 42,7 ц зерна с гектара. Сколько центнеров зерна собрали со всего поля?

П

7 Решите задачи.

а) Маша купила 2 пирожных по 15 р., шоколадный крем за 25 р. 50 к., 3 упаковки печенья по 18 р. 20 к. и 4 шоколадки по 5 р. 15 к. В кассу она отдала 150 р. Какую сдачу она должна получить?

б) В дно реки забили 10-метровые бетонные столбы так, что на 3,4 м они погружены в грунт и на 1,8 м возвышаются над водой. Какова глубина реки в этом месте?

в) В трёх мешках – 148,9 кг картофеля. В первом и во втором мешках вместе – 98,6 кг, во втором и третьем вместе – 96,9 кг. Сколько килограммов картофеля в каждом мешке?

г) Скорость течения реки – 2,2 км/ч. Катер отошёл от пристани и пошёл по течению реки. Через 1,5 ч он повернул обратно, прошёл против течения 1,5 ч и остановился. На каком расстоянии от пристани он остановился?

Н

8 а) Скорость автомобиля 72 км/ч. Какое расстояние пройдёт автомобиль за 1,2 ч, за 0,8 ч?

б) Вычислите скорость движения пешехода, который за 1,8 ч прошёл 9,9 км.

в) Пешеходу нужно пройти 14,4 км. Пешеход прошёл в два раза больше, чем ему осталось пройти. Сколько километров прошёл пешеход?

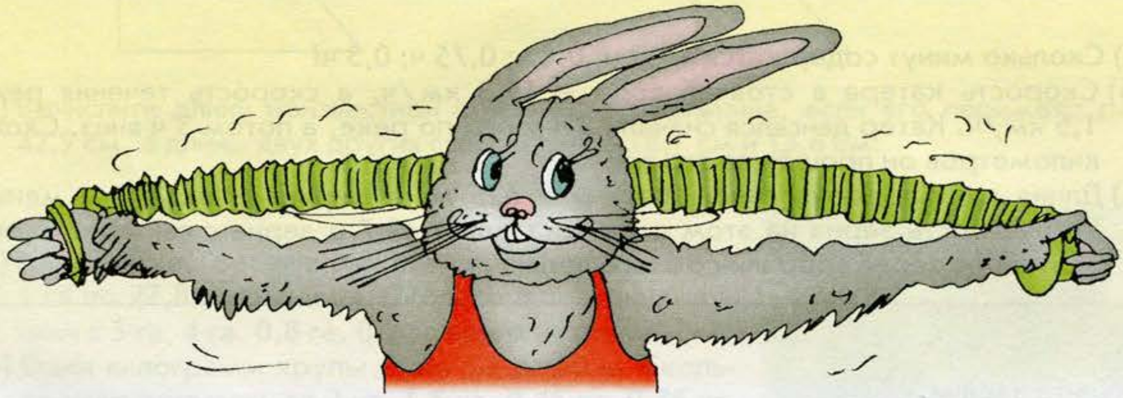
П

9 а) На 332,50 р. купили 4 пачки печенья и 3 коробки конфет. Каждая коробка конфет стоила в 5 раз дороже пачки печенья. Сколько стоила коробка конфет?

б) Скорость катера по течению реки в 7 раз больше, чем скорость течения, а скорость катера против течения – 15 км/ч. Какова собственная скорость катера?

в) В кассе была некоторая сумма денег. Поступило в кассу 480,50 р., а выдано из кассы 538,10 р., после чего в кассе осталось 794 р. Сколько денег было в кассе первоначально?

2.9 Приближение десятичных дробей



Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните правило округления натуральных чисел.
- Выполните округление числа 231 759 до указанного разряда:
  а) до десятков; б) до сотен; в) до тысяч; г) до десятков тысяч.

Открываем новые знания

- Выполните округление числа 23,1759 до указанного разряда:
  а) до тысячных; б) до сотых; в) до десятых.

?!

- Как округлить десятичную дробь до заданного разряда? Каким правилом можно воспользоваться? Всегда ли при округлении десятичных дробей надо заменять цифры после цифры указанного разряда нулями?

Округление десятичных дробей

Правило округления десятичных дробей очень похоже на правило округления натуральных чисел, но имеются и некоторые отличия.

При округлении десятичной дроби до разряда единиц, десятых, сотых и т.д. все цифры последующих разрядов отбрасываются.

При округлении десятичной дроби до разряда десятков, сотен, тысяч и т.д. (старше, чем разряд единиц) цифры последующих разрядов целой части числа заменяются нулями, цифры дробной части – отбрасываются.

Цифра разряда, до которого выполняется округление, остаётся без изменения, если следующая за ней цифра меньше 5, в противном случае к числу, запись которого заканчивается этой цифрой, прибавляется единица (запятая при этом прибавлении единицы «не замечается»).

Например, запишем результаты округления числа 826,4739: до тысячных – 826,474; до сотых – 826,47; до десятых – 826,5; до единиц (до целых) – 826; до десятков – 830; до сотен – 800; до тысяч – 1 000.

Иногда кроме *округления* десятичных дробей до данного разряда полезно применять *приближение* до данного разряда *с недостатком* или *с избытком*.

Приближение десятичных дробей с недостатком и с избытком

Если взять, к примеру, десятичную дробь 29,6274858 и отбросить в ней все знаки после запятой, начиная со второго, то получим 29,6. Если теперь прибавить к полученному числу 0,1, то получим 29,7. Наша начальная дробь заключена между числами 29,6 и 29,7. Это удобно записывать с помощью двойного неравенства:

$$29{,}6 \leq 29{,}6274858 \leq 29{,}7.$$

Говорят, что 29,6 есть **приближение** числа 29,6274858 до десятых (или до первого знака после запятой, или до единицы первого разряда после запятой) **с недостатком**, а 29,7 – **с избытком.** Иногда вместо «приближение с недостатком» говорят «приближение снизу», а вместо «приближение с избытком» – «приближение сверху».

Можно рассмотреть приближения того же числа 29,6274858 с недостатком и с избытком до сотых, тысячных и т.д.:

$$29{,}62 \leq 29{,}6274858 \leq 29{,}63;$$
$$29{,}627 \leq 29{,}6274858 \leq 29{,}628.$$

Иногда приближения с недостатком или с избытком (или сразу оба) могут оказаться равными самой приближаемой дроби. Например, для дроби 15,34000 приближения до третьего разряда после запятой и с недостатком, и с избытком равны 15,340.

Отметим следующие свойства приближений десятичных дробей с недостатком и с избытком:

1) Дробь больше любого своего приближения с недостатком (или равна ему) и меньше любого своего приближения с избытком (или равна ему).

2) Приближения с недостатком увеличиваются (или иногда не меняются), а приближения с избытком уменьшаются (или иногда не меняются) при увеличении номера разряда после запятой, до которого выполняется приближение.

Вы уже знаете, что иногда при делении десятичных дробей (или целых чисел) может получиться бесконечная десятичная дробь. Пока мы не умеем работать с такими дробями, поэтому частное в таких ситуациях обычно округляют до нужного разряда.

Значащие цифры

Важную роль при работе с десятичными дробями играет понятие **значащей цифры**. Первой значащей цифрой десятичной дроби или натурального числа называется первая (слева направо) ненулевая цифра. Все цифры, стоящие правее первой значащей цифры, тоже называются значащими (соответственно второй, третьей и т.д.).

Для примера в левом столбике записаны числа, а в правом столбике записаны те же числа, но в их записи значащие цифры подчёркнуты.

92 937	$\underline{92\,937}$
23,02	$\underline{23{,}02}$
0,00741	$0{,}00\underline{741}$
0,400000000005	$0{,}\underline{400000000005}$
0,0000000237	$0{,}0000000\underline{237}$

Округление десятичных дробей до выбранной значащей цифры

Часто число, записанное в виде десятичной дроби, или натуральное число округляют до той или иной значащей цифры. Под этим понимается округление до того десятичного разряда, в котором находится эта значащая цифра.

Например, при округлении до второй значащей цифры записанных выше чисел получим:

$92\,937 \approx 93\,000$; $23{,}02 \approx 23$; $0{,}00741 \approx 0{,}0074$; $0{,}400000000005 \approx 0{,}40$; $0{,}0000000237 \approx 0{,}000000024$.

Развиваем умения

Н

1 а) Расскажите, как округлить десятичную дробь до данного разряда.

б) Расскажите, как найти приближение десятичной дроби до данного разряда с недостатком и с избытком.

2 Расскажите, что такое значащие цифры десятичной дроби.

3 Что значит округлить число до третьей значащей цифры?

4 Округлите до третьего знака после запятой числа:
а) 0,00176; б) 0,200004; в) 0,99991; г) 0,003; д) 0,0003.

5 Найдите приближение с недостатком до второго знака после запятой:
а) 22,3901; б) 0,9003; в) 0,99991; г) 0,003; д) 34,0983.

6 Найдите приближение с избытком до первого знака после запятой:
а) 134,3901; б) 0,9003; в) 0,999; г) 0,003; д) 651,011.

7 Для числа 17,002998 найдите приближение с недостатком, приближение с избытком и округление до указанного разряда:
а) до 0,1; б) до 0,01; в) до 0,001; г) до 0,0001; д) до 0,00001.
Для приближений запишите соответственные двойные неравенства.

8 Округлите до третьей значащей цифры:
а) 38,4811; б) 0,9003; в) 0,99991; г) 0,0040404; д) 52,080093; е) 1004,001.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Округлите число 1137,0325 до сотен, десятков, десятых, сотых.
б) Округлите число 29,076001 до первой, второй, третьей, четвёртой значащей цифры.

П **Вариант II.**

а) Для числа 9,70042433 найдите приближение с недостатком и приближение с избытком до указанного разряда: 1) до 0,1; 2) до 0,01; 3) до 0,001; 4) до 0,0001. Запишите соответственные двойные неравенства.
б) Найдите результат деления числа 2 на число 3, округлённый до второй значащей цифры.

Тренировочные упражнения.

Н

9 Найдите результат деления 12,08 : 11, округлённый до: а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001; г) 0,0001; д) 0,00001. Найдите приближение результата с недостатком и с избытком до тех же десятичных разрядов. Запишите соответственные двойные неравенства.

10 Найдите результат деления числителя на знаменатель, округлённый до сотых:
а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{54}{19}$; д) $\frac{139}{23}$; е) $\frac{175}{18}$; ж) $\frac{221}{12}$; з) $\frac{12}{13}$.

11 Подчеркните первую значащую цифру числа:
а) 932; б) 0,0334; в) 0,01001; г) 4,00002; д) 0,004000; е) 0,00000101.

12 а) Может ли приближение десятичной дроби с недостатком уменьшиться при увеличении номера разряда после запятой, до которого выполняется это приближение? Может ли оно остаться неизменным? Может ли оно увеличиться?
б) Может ли приближение десятичной дроби с избытком уменьшиться при увеличении номера разряда после запятой, до которого выполняется это приближение? Может ли оно остаться неизменным? Может ли оно увеличиться?

П

13 Из справочника Валя узнал следующую информацию о некоторых старинных русских единицах измерения длины: 1 аршин = 71,12 см, 1 вершок = $\frac{1}{16}$ аршина, 1 сажень = 3 аршина, 1 верста = 500 саженей. Выразите приближённо, округляя каждый раз до целых в соответствующих единицах:
а) аршин в метрах, в дециметрах, в сантиметрах, в миллиметрах;
б) вершок в сантиметрах, в миллиметрах;
в) сажень в метрах, в дециметрах, в сантиметрах, в миллиметрах;
г) версту в километрах, в метрах.

М

14 Десятичную дробь с пятью знаками после запятой округлили до тысячных и получили 3,142. Какой наименьшей и какой наибольшей могла быть эта дробь?

Н

15 Вася утверждает, что округлить число до второй значащей цифры – всё равно что округлить его до второго знака после запятой. Прав ли Вася?

16 Подчеркните значащие цифры числа:
а) 1 900; б) 0,00761; в) 0,070007; г) 8,0000100; д) 0,000009; е) 0,00500005.

17 Найдите результат деления числителя на знаменатель, округлённый до второй значащей цифры:
а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{35}{12}$; в) $\frac{47}{48}$; г) $\frac{48}{49}$; д) $\frac{122}{93}$; е) $\frac{58}{11}$; ж) $\frac{13}{14}$; з) $\frac{22}{21}$.

П

18 Из справочника Ваня узнал следующую информацию о некоторых английских единицах измерения длины: 1 ярд = 91,44 см, 1 фут = $\frac{1}{3}$ ярда, 1 дюйм = $\frac{1}{12}$ фута.

Выразите приближённо, округляя каждый раз до целых в соответствующих единицах:
а) ярд в метрах, в дециметрах, в сантиметрах, в миллиметрах;
б) фут в дециметрах, в сантиметрах, в миллиметрах;
в) дюйм в сантиметрах, в миллиметрах.

19 Вася утверждает, что округление числа до данного разряда совпадает либо с приближением с недостатком, либо с приближением с избытком до этого разряда. Прав ли Вася?

20 Варя решила, что утверждение Васи из предыдущей задачи верно, и установила правило, когда округление числа приводит к приближению с недостатком и когда – к приближению с избытком. Попробуйте и вы сформулировать такое правило.

М

21 а) Для десятичной дроби с пятью знаками после запятой взяли приближение до тысячных с недостатком и получили 3,142. Какой наименьшей и какой наибольшей могла быть эта дробь?
б) Для десятичной дроби с пятью знаками после запятой взяли приближение до тысячных с избытком и получили 3,142. Какой наименьшей и какой наибольшей могла быть эта дробь?

2.10 Приближённые вычисления с десятичными дробями

Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните, как выполнялись приближённые вычисления с натуральными числами.
- Округлите числа 23 159 и 15 672 до указанного разряда и сложите результаты округления: а) до тысяч; б) до сотен; в) до десятков.

Открываем новые знания

- Округлите числа 23,159 и 15,672 до указанного разряда и сложите результаты округления: а) до единиц (до целых); б) до десятых; в) до сотых.

● Как приближённо вычислить сумму десятичных дробей? Каким правилом можно воспользоваться?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближённо равной сумме (разности, произведению, частному) их приближений.

Таким образом, для выполнения приближённых вычислений с числами, записанными в виде десятичных дробей, нужно заменить эти числа их приближениями, произведя округление, и выполнять вычисления с приближениями.

При этом оказывается, что при нахождении сумм и разностей используется одно правило округления, а при нахождении произведений и частных — другое.

Чтобы приближённо вычислить сумму или разность двух чисел, надо округлить эти числа до одного и того же разряда, а затем сложить или вычесть полученные приближения.

Пример 1. Вычислить сумму чисел $x = 123{,}389378$ и $y = 26{,}0258$, округлив их до тысячных.

Сначала выполним округление до указанного разряда:
$x \approx 123{,}389$; $y \approx 26{,}026$, а затем сложим.

$$\begin{array}{r} +\,123{,}389 \\ 26{,}026 \\ \hline 149{,}415 \end{array}$$

Таким образом, $x + y \approx 149{,}415$.

Пример 2. Вычислить разность чисел $x = 75{,}20562$ и $y = 49{,}5$, округлив их до сотых.

Сначала выполним округление до указанного разряда:
$x \approx 75{,}21$; $y \approx 49{,}50$, а затем вычтем.

$$\begin{array}{r} -\,75{,}21 \\ 49{,}50 \\ \hline 25{,}71 \end{array}$$

Таким образом, $x - y \approx 25{,}71$.

Чтобы приближённо вычислить произведение или частное двух чисел, надо округлить эти числа до одной и той же значащей цифры, перемножить или разделить полученные приближения, а затем результат округлить до той же значащей цифры.

Пример 3. Вычислить произведение чисел $x = 31{,}812205$ и $y = 0{,}05612$, округлив их до третьей значащей цифры.

Сначала выполним округление до указанной значащей цифры:
$x \approx 31{,}8$; $y \approx 0{,}0561$, а затем перемножим.

$$\begin{array}{r} \times\ 31{,}8 \\ 0{,}0561 \\ \hline +\ 318 \\ 1908 \\ 1590 \\ \hline 1{,}78398 \end{array}$$

Теперь округлим произведение до третьей значащей цифры:
$x \cdot y \approx 1{,}78$.
Таким образом, $x \cdot y \approx 1{,}78$.

Пример 4. Вычислить частное чисел $x = 0{,}08075616$ и $y = 0{,}377062$, округлив их до второй значащей цифры.
Сначала выполним округление до указанной значащей цифры:
$x \approx 0{,}081$; $y \approx 0{,}38$, а затем разделим.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}08{,}1 & 0{,}38, \\ \hline -\ 76 & 0{,}213\ldots \\ \hline 50 & \\ -\ 38 & \\ \hline 120 & \\ -\ 114 & \\ \hline 60\ldots & \end{array}$$

Теперь округлим частное до второй значащей цифры:
$x : y \approx 0{,}21$.
Таким образом, $x : y \approx 0{,}21$.

Развиваем умения

Н

1 Расскажите, как найти приближённо сумму двух чисел и разность двух чисел.

2 Расскажите, как найти приближённо произведение двух чисел и частное двух чисел.

3 В чём основное отличие правил приближённого нахождения суммы и произведения?

4 Округлив числа x и y до сотых, вычислите приближённо их сумму и разность:
а) $x = 34{,}826$, $y = 33{,}0384$;
б) $x = 13{,}785$, $y = 2{,}400801$;
в) $x = 0{,}0124$, $y = 0{,}00829$;
г) $x = 6{,}0729$, $y = 1{,}02741$;
д) $x = 42{,}0551$, $y = 0{,}48912$;
е) $x = 0{,}94027$, $y = 0{,}0689$.

5 Округлив числа x и y до 0,0001, вычислите приближённо их сумму и разность:
а) $x = 4{,}08826$, $y = 0{,}030084$; б) $x = 0{,}0145134$, $y = 0{,}00276346$.

6 Округлив числа x и y до второй значащей цифры, вычислите приближённо их произведение, а также частные $x : y$ и $y : x$:
а) $x = 781{,}5$, $y = 23{,}876$; б) $x = 0{,}00090237$, $y = 0{,}0036864746$.
Вычислите приближённо произведения и частные этих же чисел, округлив их до третьей значащей цифры. Сравните полученные результаты.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Найдите приближённо сумму чисел 123,389378 и 26,0258, округлив их до второго знака после запятой.

б) Найдите приближённо произведение чисел 0,0211001 и 233,001, округлив их до второй значащей цифры.

П **Вариант II.**

а) Найдите приближённо разность чисел 3,0089202 и 0,099748, округлив их до четвёртого знака после запятой.

б) Найдите приближённо частное чисел 0,0423778 и 0,26478, округлив их до третьей значащей цифры.

Тренировочные упражнения.

Н

7 Расстояние 727 км автомобиль преодолел за 12 ч. Найдите среднюю скорость автомобиля. Ответ округлите до второй значащей цифры.

8 Найдите площадь прямоугольного участка длиной 233 м и шириной 127 м:
а) в квадратных метрах; б) в арах; в) в гектарах.
Ответ дайте до третьей значащей цифры.

9 Округлив числа x и y до 0,01, вычислите приближённо их сумму и разность:
а) $x = 32{,}6034$, $y = 5{,}082738$; б) $x = 11{,}12347$, $y = 10{,}8939$.

10 Округлив числа x и y до третьей значащей цифры, вычислите приближённо их произведение, а также частные $x : y$ и $y : x$:
а) $x = 12{,}8934$, $y = 0{,}00070456$; б) $x = 0{,}026317$, $y = 1580{,}43367$.

П

11 Верно ли, что точная сумма двух чисел больше суммы приближений с недостатком до любого разряда (или равна ей) и меньше суммы приближений с избытком до любого разряда (или равна ей)?

М

12 Ищется сумма двух чисел. Проведём два вычисления.
1) Округлим каждое слагаемое до данного разряда и после этого выполним сложение.
2) Выполним сложение исходных чисел, а затем сумму округлим до того же разряда.

Обязательно ли результаты будут равны? Если не обязательно, то на сколько единиц соответственного разряда они могут максимально различаться?

Н

13 Округлив числа x и y до тысячных, вычислите приближённо их сумму и разность:

а) $x = 20{,}08826$, $y = 0{,}9663307$; б) $x = 0{,}01312456$, $y = 0{,}00285766$.

14 Округлив числа x и y до второй значащей цифры, вычислите приближённо их произведение, а также частные $x : y$ и $y : x$:

а) $x = 703{,}12$, $y = 33{,}003$; б) $x = 0{,}0049568237$, $y = 0{,}0848995$.

15 Велосипедист проехал 75 км, двигаясь со средней скоростью 14 км/ч. Найдите, сколько часов длилась поездка, с точностью до второй значащей цифры.

П

16 Решая предыдущую задачу, Вася разделил 75 на 14 и получил приближённо 5,3571429. Он удивился, зачем в условии требуется так грубо округлять результат, если его ответ намного точнее. Валя ответил Васе, что 75 км и 14 км/ч – величины, безусловно, приближённые, и раз мы знаем их с точностью до второй значащей цифры, то и ответ нужно округлить до второй значащей цифры. Прав ли Валя?

17 Используя соображения предыдущей задачи, найдите площадь прямоугольной пластины размером 87 см $\times$ 32 см, самостоятельно определив, как нужно округлить результат.

М

18 Правило приближённого нахождения суммы двух чисел, которым мы пользуемся, является достаточно грубым. Например, сумма чисел 2,745 и 5,54801 равна 8,29301. Если округлить слагаемые до десятых и сложить, то получим $2{,}7 + 5{,}5 = 8{,}2$. А если округлить сумму до десятых, то получим 8,3. Поэтому нельзя говорить, что, округляя слагаемые до некоторого разряда, мы получим приближённое значение суммы с точностью до этого же разряда (хотя в большинстве случаев так и получается).

Имеется более точное правило. Например, для нахождения приближённого значения суммы с точностью до десятых нужно округлить слагаемые до сотых, сложить приближения и их сумму округлить до десятых.

Найдите приближённое значение суммы чисел 2,745 и 5,54801 до десятых, пользуясь новым правилом.

2.11 Преобразование обыкновенных дробей в десятичные

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите какую-нибудь десятичную дробь и представьте её в виде обыкновенной.
- Расскажите, как вы это сделали.
- Представьте в виде десятичной обыкновенную дробь $\frac{3}{4}$.

Открываем новые знания

- Разложите на простые множители числа 10, 100, 1 000.
- Расскажите, на какие простые множители можно разложить числа, в старшем разряде которых стоит цифра 1, а во всех младших – нули.
- Попробуйте объяснить, как обыкновенную дробь представили в виде десятичной:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

- Попробуйте представить в виде десятичной дробь $\frac{5}{12}$.

?!

- Всякую ли обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной?
- Какие обыкновенные дроби можно представить в виде десятичных?
- Как это сделать?

По определению, в виде десятичной дроби можно записать любую обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1 000 и вообще 10^n. Любую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной, знаменатель которой равен степени числа 10.

Например: $0{,}403 = \frac{403}{1\,000}$; $5{,}36 = \frac{536}{100} = \frac{134}{25}$.

Попробуем ответить на вопрос: всякую ли обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной?

Для того чтобы это сделать, нужно привести её к знаменателю, равному степени числа 10.

Число 10 представляется в виде произведения двух простых чисел – 2 и 5:

$10 = 2 \cdot 5$. Поэтому любая степень числа 10 представляется в виде произведения степени числа 2 на такую же степень числа 5.

$10 = 2 \cdot 5$;

$100 = 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5^2$;

$1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^3$;

$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^4 \cdot 5^4$

и т.д.

Рассмотрим дробь $\frac{3}{16}$. Сначала, домножив числитель и знаменатель на нужное натуральное число, представим её в виде обыкновенной дроби, знаменатель которой является степенью числа 10.

Число 16 можно разложить на простые множители следующим образом:

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Если мы умножим его на четыре пятёрки, то получим 10 000.

Делаем вывод: дробь $\frac{3}{16}$ можно представить в виде десятичной.

$$\frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1\,875}{10\,000} = 0{,}1875.$$

Наши рассуждения позволяют нам сформулировать следующее правило: *если знаменатель обыкновенной дроби не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эту дробь можно представить в виде десятичной.*

Рассмотрим теперь дробь $\frac{4}{15}$. Разложим на простые множители её знаменатель: $15 = 3 \cdot 5$. На какие бы целые числа мы ни домножали число 15, полученное произведение никогда нельзя будет разложить на одни только простые множители «двойки» и «пятёрки» – среди простых множителей всегда будет присутствовать число 3.

Делаем вывод: *если знаменатель обыкновенной несократимой дроби имеет другие простые делители, кроме 2 и 5, то эту дробь нельзя представить в виде десятичной.*

Обратите внимание: в последнем утверждении речь идёт только о несократимых дробях. Возьмём, например, сократимую дробь $\frac{12}{60}$. Её знаменатель содержит простой множитель 3, но после сокращения дроби он исчезнет и полученную несократимую дробь, а значит и исходную сократимую, можно будет представить в виде десятичной: $\frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Для преобразования обыкновенной дроби в десятичную имеется *два основных способа*.

Один из них мы уже рассмотрели. Он сводится к умножению числителя и знаменателя обыкновенной несократимой дроби на некоторые степени чисел 2 или 5 так, чтобы в знаменателе получилась степень числа 10.

Например: $\frac{3}{125} = \frac{3}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{24}{1\,000} = 0{,}024.$

Другой – это способ деления числителя на знаменатель «уголком».

$\frac{3}{125} = 3 : 125 = 0{,}024.$

$$
\begin{array}{r|l}
-3 & 125 \\
\underline{0} & 0{,}024 \\
-30 & \\
\underline{0} & \\
-300 & \\
\underline{250} & \\
-500 & \\
\underline{500} & \\
0 &
\end{array}
$$

Заметьте, что в случае, когда обыкновенную дробь нельзя разложить в *конечную* десятичную, частным от деления её числителя на знаменатель будет *бесконечная* десятичная дробь.

Например, рассмотрим обыкновенную дробь $\frac{7}{9}$.

Это несократимая дробь, знаменатель которой содержит простой множитель 3, следовательно, она не может быть представлена в виде конечной десятичной дроби. При делении 7 на 9 получится бесконечная десятичная дробь 0,777...

Н

1 Укажите, какие из обыкновенных дробей можно представить в виде конечных десятичных, а какие нельзя. Обоснуйте свой ответ.

а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{4}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$; д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$.

2 Запишите дробь в виде несократимой и скажите, можно ли её представить в виде десятичной.

а) $\frac{6}{24}$; б) $\frac{7}{21}$; в) $\frac{33}{44}$; г) $\frac{15}{24}$; д) $\frac{28}{52}$; е) $\frac{64}{96}$; ж) $\frac{38}{95}$; з) $\frac{927}{1\,536}$.

3 Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби.
а) 0,4; б) 0,12; в) 0,45; г) 0,125; д) 0,04; е) 0,384; ж) 0,375; з) 0,96.

4 Найдите двумя способами представление обыкновенных дробей в виде конечных десятичных.
а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{11}{25}$; в) $\frac{1}{20}$; г) $\frac{7}{50}$; д) $\frac{17}{500}$; е) $\frac{9}{125}$; ж) $\frac{15}{16}$; з) $\frac{27}{40}$.

5 Запишите частное в виде обыкновенной дроби и, если возможно, преобразуйте её в конечную десятичную.

а) 11 : 2;	д) 9 : 8;	и) 9 : 36;	н) 12 : 16;
б) 23 : 5;	е) 8 : 9;	к) 15 : 24;	о) 11 : 8;
в) 43 : 25;	ж) 4 : 12;	л) 16 : 6;	п) 13 : 20;
г) 13 : 20;	з) 24 : 15;	м) 10 : 30;	р) 42 : 56.

6 Найдите частное от деления числителя на знаменатель. Деление выполняйте «уголком».
а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{3}{25}$; в) $\frac{17}{20}$; г) $\frac{7}{28}$; д) $\frac{42}{75}$; е) $\frac{41}{80}$; ж) $\frac{4}{125}$; з) $\frac{19}{40}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Найдите двумя способами представление обыкновенных дробей в виде конечных десятичных: а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{125}$; в) $\frac{3}{40}$.

П Вариант II.

Определите, можно ли записать данные обыкновенные дроби в виде конечных десятичных дробей (те, которые можно, запишите):

а) $\frac{5}{16}$; б) $\frac{7}{84}$; в) $\frac{20}{22}$.

Тренировочные упражнения.

Н

7 Представьте обыкновенные дроби в виде конечных десятичных и запомните результат:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{8}$.

8 Определите, можно ли записать данные дроби в виде конечных десятичных (те, которые можно, запишите):

а) $\frac{6}{24}$; б) $\frac{33}{60}$; в) $\frac{18}{32}$; г) $\frac{7}{84}$; д) $\frac{20}{123}$; е) $\frac{9}{121}$; ж) $\frac{19}{95}$; з) $\frac{39}{52}$.

9 Сократите дроби и представьте их в виде конечных десятичных.

а) $\frac{12}{60}$; б) $\frac{18}{90}$; в) $\frac{54}{300}$; г) $\frac{22}{110}$; д) $\frac{32}{400}$; е) $\frac{42}{700}$; ж) $\frac{15}{75}$; з) $\frac{9}{144}$.

П

10 Выразите время в часах и, если возможно, запишите ответ в виде конечной десятичной дроби.

а) 1 ч 10 мин; в) 20 мин; д) 18 мин; ж) 2 ч 24 мин;
б) 2 ч 45 мин; г) 3 ч 40 мин; е) 4 ч 9 мин; з) 156 мин.

Н

11 Определите, можно ли записать данные дроби в виде конечных десятичных (те, которые можно, запишите):

а) $\frac{5}{30}$; б) $\frac{21}{35}$; в) $\frac{18}{120}$; г) $\frac{14}{56}$; д) $\frac{11}{88}$; е) $\frac{49}{84}$; ж) $\frac{6}{96}$; з) $\frac{3}{8}$.

12 Выразите время в часах и, если возможно, запишите ответ в виде конечной десятичной дроби.

а) 30 мин; в) 6 мин; д) 20 мин; ж) 18 мин;
б) 1 мин; г) 15 мин; е) 45 мин; з) 48 мин.

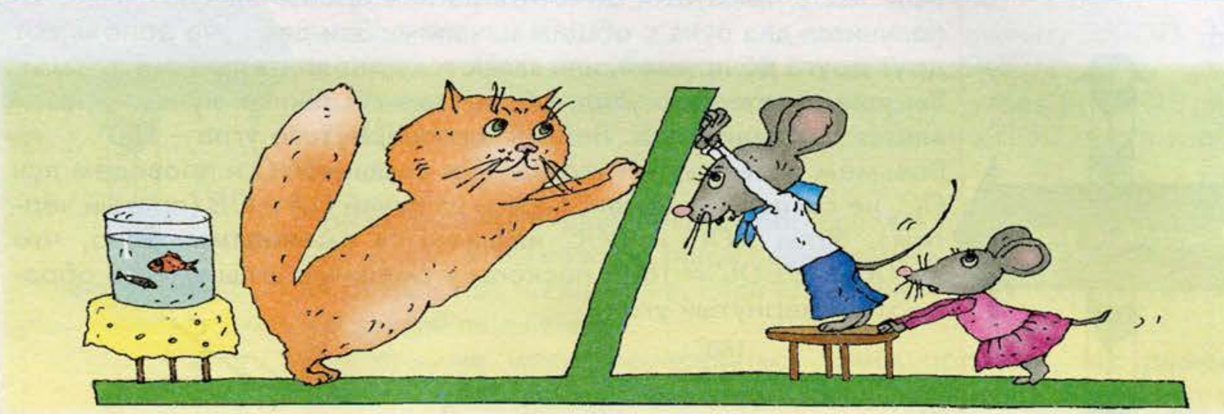
П

13 Не выполняя вычислений, подберите выражение, значение которого равно значению выражения 0,5 – 0,2.

а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$.

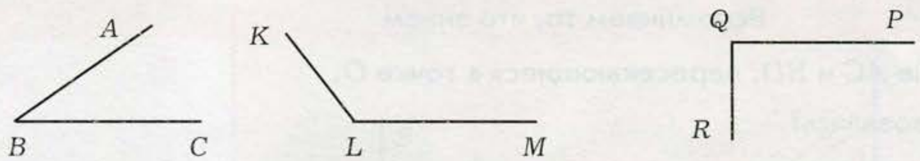
ГЛАВА III Элементы геометрии

3.1 Смежные и вертикальные углы



Вспоминаем то, что знаем

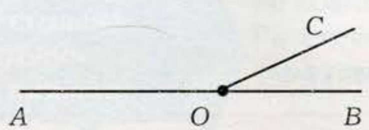
- Что называется углом?
- Измерьте изображённые на чертеже углы.



- Как называется изображённый на чертеже угол? Чему равна его величина?

Открываем новые знания

- Из вершины развёрнутого угла провели луч. Сколько углов получилось? Определите, не выполняя измерений и вычислений, чему равна сумма углов AOC и BOC.



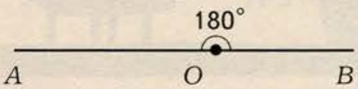
- Как бы вы назвали пару углов AOC и BOC, учитывая их положение относительно друг друга?

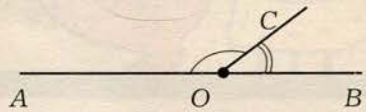
?!

- Начертите несколько развёрнутых углов. В каждом из них проведите луч с началом в вершине угла. Будет ли сумма двух полученных углов одной и той же во всех случаях?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Если взять прямую и отметить на ней произвольную точку, то получится два луча с общим началом. Эти два луча **дополняют друг друга до прямой**, или являются **дополнительными** лучами. Вы уже знаете, что угол, образованный такими лучами, называется *развёрнутым*. Величина развёрнутого угла – 180°.
Возьмём развёрнутый угол AOB с вершиной O и проведём луч OC, не совпадающий ни с одним из лучей OA и OB (правый чертёж). Углы AOC и BOC называются **смежными**. Ясно, что $\angle AOC + \angle BOC = 180°$, поскольку смежные углы вместе образуют развёрнутый угол.





Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Сумма смежных углов равна 180°.

Вспоминаем то, что знаем

- Начертите прямые AC и BD, пересекающиеся в точке O.
- Какие углы образовались?
- Какие пары смежных углов вы можете назвать?

Открываем новые знания

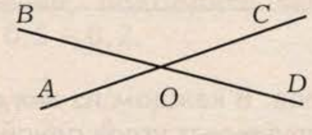
- Что вы можете предположить о величинах углов AOB и COD?

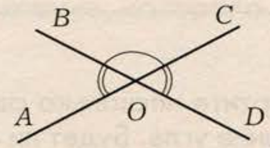
?!

- Не выполняя измерений, найдите на вашем чертеже равные между собой углы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Возьмём прямые AC и BD, пересекающиеся в точке O.
Углы, стороны которых являются дополнительными лучами, называются **вертикальными**. На чертеже вертикальные углы – это $\angle AOB$ и $\angle COD$, а также углы $\angle BOC$ и $\angle AOD$.





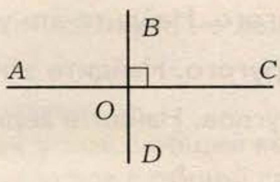
Вертикальные углы равны.

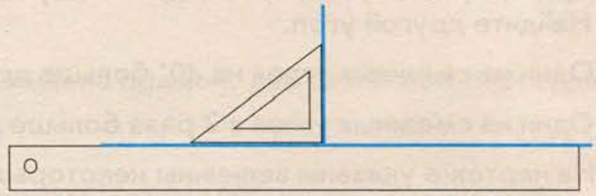
Докажем, к примеру, что $\angle AOB = \angle COD$. Для доказательства заметим, что $\angle AOB$ и $\angle BOC$ являются смежными, значит, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$, и поэтому $\angle AOB = 180° - \angle BOC$. Аналогично $\angle COD$ и $\angle BOC$ – смежные, значит, $\angle COD + \angle BOC = 180°$, и поэтому $\angle COD = 180° - \angle BOC$.

Получили, что каждый из двух вертикальных углов (и $\angle AOB$, и $\angle COD$) равен $180° - \angle BOC$, значит, $\angle AOB = \angle COD$, что и требовалось доказать.

При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов. Углы каждой такой пары равны между собой, а углы из разных пар – смежные. Если углы одной пары острые, то углы другой пары тупые.

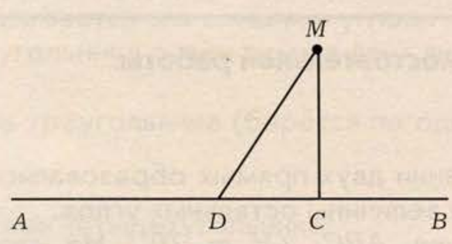
Две прямые могут пересекаться таким образом, что равны между собой все четыре угла. Тогда величина каждого угла $90°$, а такие прямые называются *перпендикулярными*. Это слово в переводе с латыни означает «отвесный». Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. Например, на левом чертеже $AC \perp BD$. Перпендикулярные прямые удобно проводить с помощью угольника.





Если точка M лежит вне прямой AB, а точка C лежит на прямой AB, причём $MC \perp AB$, то отрезок MC называется **перпендикуляром**, проведённым из точки M к прямой AB. Перпендикуляр MC короче любого отрезка MD, где D – точка на прямой AB, не совпадающая с точкой C.

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой.



Н

1 Продолжите предложения.
а) Смежными называются углы, у которых…
б) Сумма смежных углов равна…
в) Сумма углов треугольника равна…
г) Если две стороны треугольника перпендикулярны, то треугольник…
д) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна…
е) Вертикальными называются углы, у которых…
ж) Прямые называются перпендикулярными, если…
з) Расстоянием от точки до прямой называется…

2 а) Сформулируйте свойство смежных углов.
б) Сформулируйте свойство вертикальных углов.
в) Докажите свойство вертикальных углов.

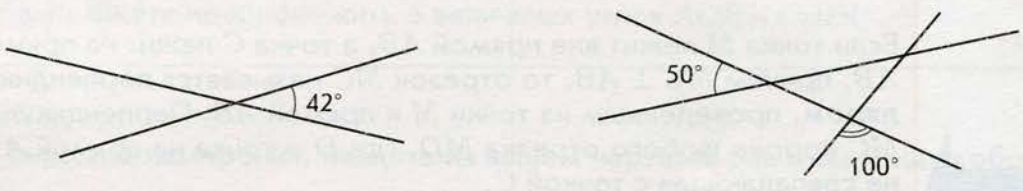
3 Верны ли высказывания:
а) если сумма двух углов равна 180°, то они смежные;
б) если два угла с общей вершиной равны, то они вертикальные?

4 Один из смежных углов равен:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°.
Найдите другой угол.

5 Один из смежных углов на 40° больше другого. Найдите эти углы.

6 Один из смежных углов в 2 раза больше другого. Найдите эти углы.

7 На чертеже указаны величины некоторых углов. Найдите величины всех остальных углов.



8 При пересечении двух прямых образовались четыре угла, причём известно, что сумма двух из них равна 100°. Найдите величины всех углов.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) При пересечении двух прямых образовались четыре угла, один из которых равен 130°. Найдите величины остальных углов.
б) В треугольнике ABC $\angle B = 70°$. На стороне AB взята такая точка D, что $CD \perp AB$. Найдите углы треугольника BCD.

П **Вариант II.**

а) При пересечении двух прямых образовались четыре угла, один из которых равен сумме двух других. Найдите величины всех углов.

б) В треугольнике ABC $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. На стороне AB взята такая точка E, что $CE \perp AB$. Найдите углы треугольника CAE.

Тренировочные упражнения.

Н

9 Начертите с помощью транспортира две прямые, пересекающиеся под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

10 Известен один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых: а) 15°; б) 70°; в) 90°; г) 130°.
Найдите остальные углы.

11 Какую часть развёрнутого угла составляет угол:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°?

12 Начертите в тетради прямую и возьмите точку вне этой прямой. Проведите с помощью угольника перпендикуляр из точки к прямой.

П

13 Можно ли провести из точки, не лежащей на прямой, два различных перпендикуляра к этой прямой?

14 Верны ли высказывания:
а) если сумма двух углов с общей вершиной равна 180°, то они смежные;
б) если сумма двух углов с общей стороной равна 180°, то они смежные;
в) два разных угла, смежных одному и тому же углу, вертикальны?

15 Даны прямая и точка. С помощью угольника проведите через данную точку прямую, перпендикулярную данной прямой. Рассмотрите отдельно два случая: а) данная точка лежит на данной прямой; б) данная точка не лежит на данной прямой.

М

16 Углы треугольника называются также его внутренними углами. Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется его внешним углом.
а) Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.
б) Чему равна сумма внешних углов треугольника (берётся по одному внешнему углу при каждой вершине)?

17 а) Чему равна сумма внутренних углов четырёхугольника?
б) Чему равна сумма внешних углов четырёхугольника (берётся по одному внешнему углу при каждой вершине)?

Н

18 При пересечении двух прямых образовалось четыре угла. Найдите величины каждого из этих углов, если известно, что:
а) один из углов равен 48°;
б) сумма двух углов равна 156°;
в) сумма трёх углов равна 232°.

19 Один из смежных углов на 100° меньше другого. Найдите эти углы.

20 Один из смежных углов в 5 раз меньше другого. Найдите эти углы.

21 Начертите в тетради прямую и возьмите точку вне этой прямой. Измерьте расстояние от точки до прямой.

П

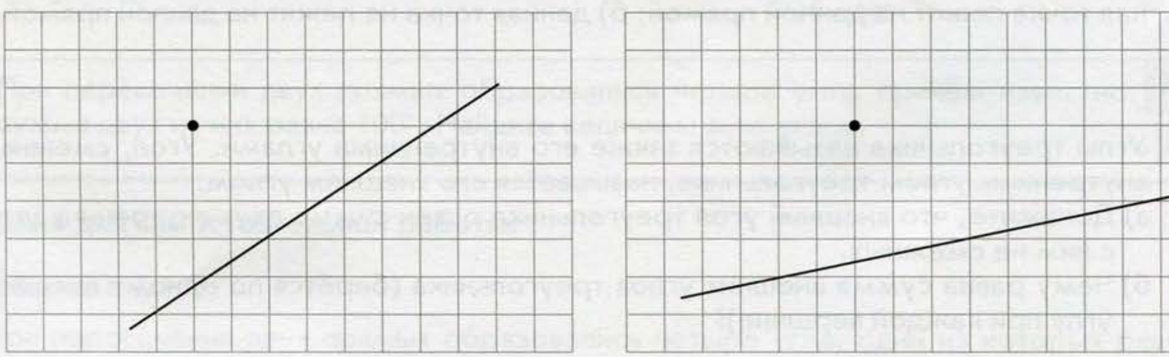
22 Начертите в тетради острый угол и возьмите точку внутри этого угла. Измерьте расстояние от точки до сторон угла.

23 Начертите несколько пар углов так, чтобы стороны одного угла были перпендикулярны сторонам другого угла. Измерьте каждый из углов. Выскажите предположение, как связаны между собой величины углов со взаимно перпендикулярными сторонами.

24 Начертите на листе бумаги прямую и выберите точку. Перегибая лист бумаги, получите прямую, проходящую через выбранную точку перпендикулярно начерченной прямой. Рассмотрите отдельно два случая: а) точка выбрана на начерченной прямой; б) точка выбрана вне начерченной прямой.

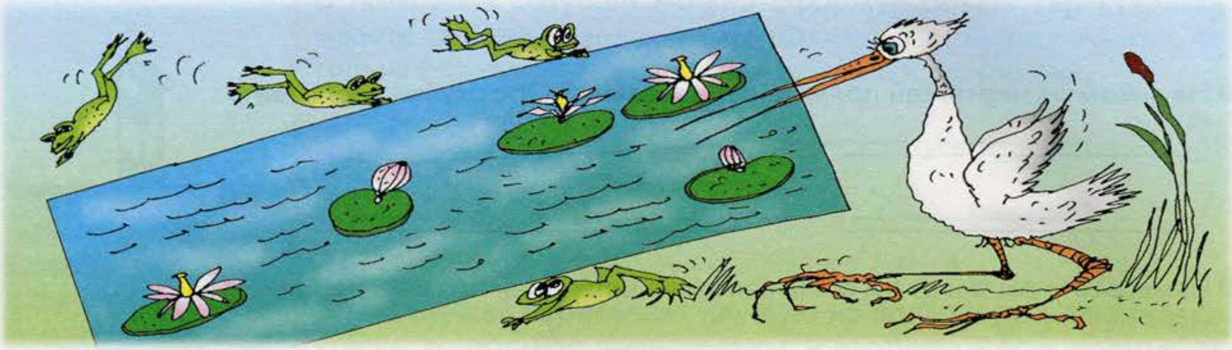
М

25 На листе клетчатой бумаги начерчена прямая и взята точка, как на чертеже. Проведите через взятую точку прямую, перпендикулярную начерченной прямой.



26 Докажите, что углы со взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дают в сумме 180°.

Параллельные прямые



Вспоминаем то, что знаем

- Начертите прямоугольник.
- Какие из сторон этого прямоугольника параллельны?

Открываем новые знания

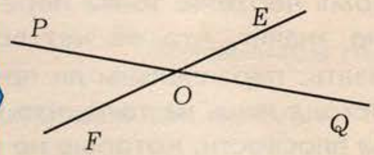
- Начертите на листе клетчатой бумаги две параллельные прямые.

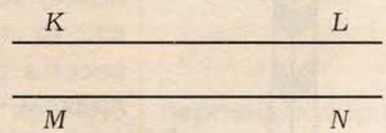
?!

- Имеется ли у параллельных прямых хотя бы одна общая точка?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Две различные прямые на плоскости могут пересекаться, причём только в единственной точке, а могут не пересекаться (то есть не иметь общих точек).





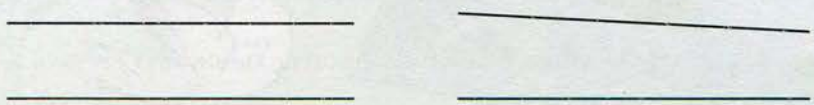
Две прямые на плоскости, не имеющие общих точек, называются *параллельными*.
Это слово в переводе с греческого языка обозначает «идущие рядом».
Параллельность прямых обозначается с помощью знака $\parallel$. К примеру, на правом чертеже $KL \parallel MN$.

Вспоминаем то, что знаем

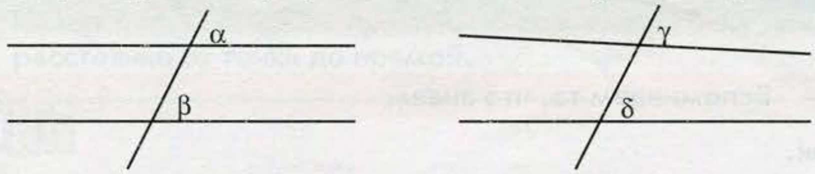
- Вспомните, какие прямые называются параллельными.

Открываем новые знания

- На каком из чертежей прямые параллельны? Обоснуйте ваш ответ.



- Измерьте углы α и β, γ и δ. На каком из чертежей прямые параллельны?



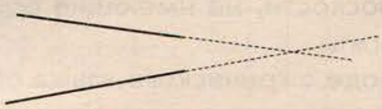
- Начертите прямую. Постройте ещё одну прямую, параллельную первой, с помощью линейки и угольника.

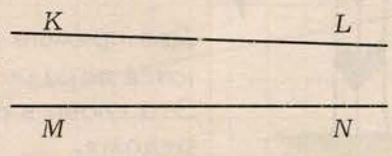
?!

- Сформулируйте условие параллельности прямых.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Когда мы работаем с чертежом, то всегда видим лишь части прямых. При этом может оказаться, что эти части на чертеже не пересекаются, и тогда неясно: то ли точка пересечения прямых лежит вне чертежа, то ли её вообще нет. Если мы попытаемся продолжить части этих прямых, то наши возможности окажутся ограниченными размерами листа бумаги (или классной доски), на которых выполнен чертёж, и если на «улучшенном», «более полном» чертеже точка пересечения отсутствует, то это вовсе не значит, что её нет вообще. Например, весьма сложно сказать, параллельны ли прямые KL и MN на правом чертеже, исходя лишь из того, что параллельными называются прямые на плоскости, которые не пересекаются.

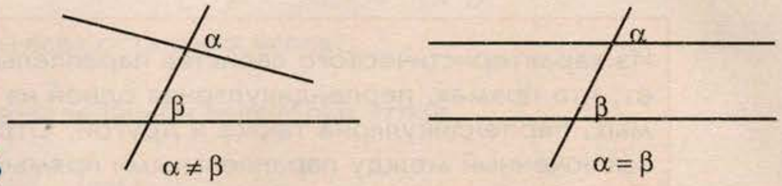




Есть более удобные способы проверки параллельности. Пусть имеются две прямые – неважно, параллельные или нет.

Прямая, которая пересекает обе данные прямые, называется **секущей** (левый чертёж).

С помощью секущей можно сформулировать **характеристическое свойство** параллельных прямых, т.е. такое свойство, которым обладают параллельные прямые и только они.

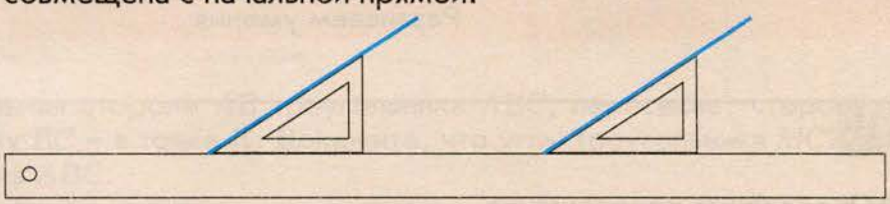


Если секущая пересекает каждую из прямых под одинаковым углом, то прямые параллельны, и наоборот, если прямые параллельны, то секущая пересекает их под одинаковым углом.

В частности, если прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Углы α и β на левом и правом чертежах называются соответственными – они занимают одинаковые положения на «перекрёстках», образуемых секущей с каждой из прямых.

Характеристическое свойство параллельных прямых позволяет не только устанавливать наличие или отсутствие параллельности, но и строить прямую, параллельную данной, с помощью линейки и угольника (или двух угольников). Для этого одну из сторон угольника располагают вдоль данной прямой, к другой стороне прикладывают линейку, сдвигают угольник вдоль линейки и проводят прямую вдоль той его стороны, которая была совмещена с начальной прямой.



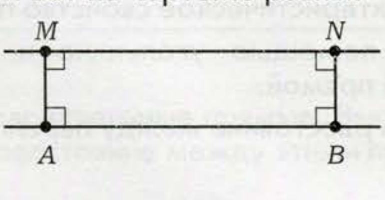
Вместо линейки можно использовать другой угольник.

Вспоминаем то, что знаем

- Начертите две параллельные прямые. Проведите прямую, перпендикулярную одной из них.

Открываем новые знания

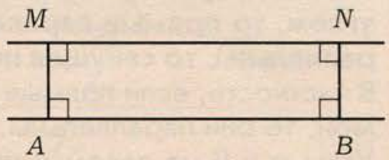
- Докажите, что эта прямая перпендикулярна обеим параллельным прямым.
- Докажите, что отрезки AM и BN на чертеже равны.



● Сформулируйте свойство параллельных прямых, которое вы увидели на чертеже.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Из характеристического свойства параллельных прямых следует, что прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна также и другой. Отрезок этой прямой, заключённый между параллельными прямыми, называется **общим перпендикуляром** параллельных прямых.



Длина любого общего перпендикуляра двух данных параллельных прямых одна и та же; она не зависит от того, где именно проведён этот перпендикуляр (ведь четырёхугольник $ABNM$ на чертеже – прямоугольник). Это свойство часто выражают словами «параллельные прямые являются **равноотстоящими**».

Расстоянием между параллельными прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Развиваем умения

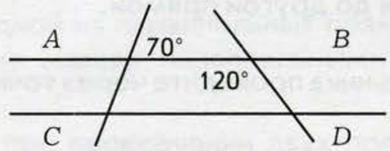
Н

1 ● Продолжите предложения.

а) Параллельные прямые – это…
б) Секущей двух прямых называется…
в) Соответственными углами называются…
г) Если соответственные углы равны, то прямые…
д) Если соответственные углы не равны, то прямые…
е) Если прямые параллельны, то соответственные углы…
ж) Общим перпендикуляром двух параллельных прямых называется…
з) Расстоянием между параллельными прямыми называется…

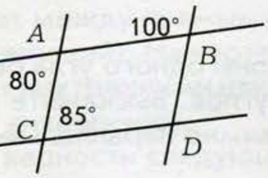
2 ● а) Сформулируйте характеристическое свойство параллельных прямых.
б) Расскажите, как с помощью угольника и линейки провести прямую, параллельную данной прямой.
в) Расскажите, как найти расстояние между параллельными прямыми.

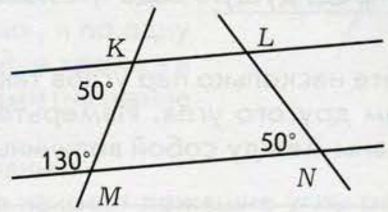
3 На чертеже, где $AB \parallel CD$, указаны величины некоторых углов.



Найдите величины всех остальных углов.

4 На чертеже указаны величины некоторых углов.





Какие из прямых параллельны?

5 Верно ли, что противоположные стороны прямоугольника параллельны?

6 Докажите, что параллельные прямые являются равноотстоящими.

7 Верно ли, что две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке M, а сторону BC – в точке K. Докажите, что углы треугольника MCK равны углам треугольника ABC.

б) Начертите две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см.

П **Вариант II.**

а) Равносторонние треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB. Параллельны ли прямые BC и AD? Обоснуйте свой ответ.

б) Расстояние между параллельными прямыми равно 3 см. Расстояние от точки до одной из прямых равно 1 см. Найдите расстояние от этой точки до другой прямой. Сколько решений имеет задача?

Тренировочные упражнения.

Н

8 Проведите в тетради две параллельные прямые. Выполняя необходимые построения и измерения, найдите расстояние между этими прямыми.

9 Докажите, что расстояние между параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой прямой.

10 С помощью линейки и угольника проведите через точку вне данной прямой прямую, параллельную данной.

П

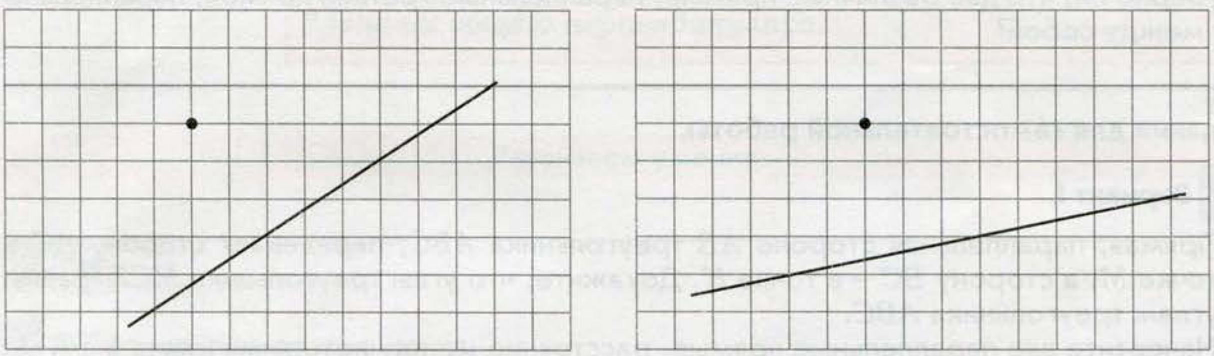
11 Решите предыдущую задачу с помощью одного лишь угольника.

12 Начертите несколько пар углов так, чтобы стороны одного угла были параллельны сторонам другого угла. Измерьте каждый из углов. Выскажите предположение, как связаны между собой величины углов со взаимно параллельными сторонами.

М

13 Докажите характеристическое свойство параллельных прямых.

14 На листе клетчатой бумаги начерчена прямая и взята точка, как на чертеже. Проведите через взятую точку прямую, параллельную начерченной прямой.



Н

15 а) Через точку M, лежащую между параллельными прямыми, проведены две секущие, пересекающие одну из параллельных прямых в точках A и B, а другую – в точках C и D. Убедитесь, что у треугольников MAB и MCD одинаковые углы, причём для каждого угла одного треугольника укажите равный ему угол другого треугольника.

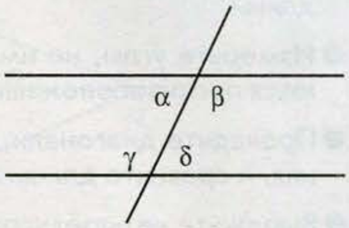
б) Будет ли верно утверждение предыдущей задачи, если точка M не лежит между параллельными прямыми (и не лежит ни на одной из них)?

16 Начертите в тетради прямую. Проведите параллельную прямую на расстоянии 3 см от начерченной прямой. Сколькими способами можно провести требуемую параллельную прямую?

П

17 Расстояние от точки до одной из параллельных прямых равно 2 см, а до другой – 4 см. Найдите расстояние между параллельными прямыми. Сколько решений имеет задача?

18 Из углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, специальные названия имеют не только пары соответственных углов, но и некоторые другие пары. На чертеже углы α и γ, а также углы β и δ называются **внутренними односторонними** (название объясняется тем, что они лежат между прямыми, т.е. «внутри», и по одну сторону от секущей). На чертеже углы α и δ, а также γ и β называются **внутренними накрест лежащими** (название объясняется аналогично).



Убедитесь в верности следующих высказываний:

а) если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны;

б) если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны;

в) если прямые параллельны, то внутренние односторонние углы дают в сумме 180°;

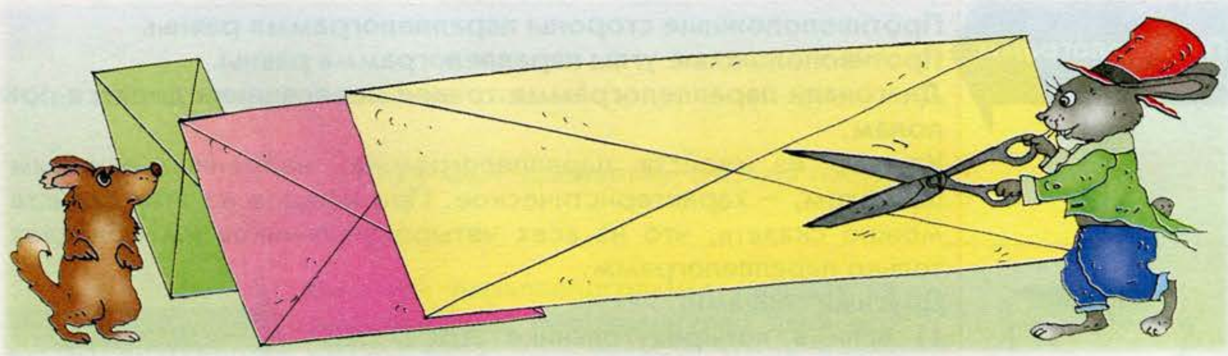
г) если внутренние односторонние углы дают в сумме 180°, то прямые параллельны.

М

19 Докажите, что углы со взаимно параллельными сторонами либо равны, либо дают в сумме 180°.

20 Начертите на прямоугольном листе бумаги прямую и выберите точку. Перегибая лист, получите прямую, проходящую через выбранную точку параллельно начерченной прямой.

3.3 Параллелограмм



Вспоминаем то, что знаем

- Начертите прямоугольник на нелинованной бумаге.

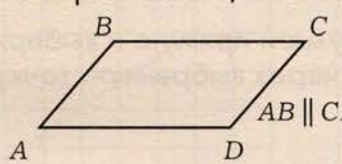
Открываем новые знания

- Начертите четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, но при этом не являющийся прямоугольником.
- Измерьте противоположные стороны полученного четырёхугольника и сравните их длины.
- Измерьте углы, не имеющие общих сторон (такие углы четырёхугольника называются противоположными), и сравните их величины.
- Проведите диагонали, измерьте отрезки, на которые их разбила точка пересечения, и сравните длины этих отрезков.
- Вырежьте четырёхугольник, с которым вы работали, из листа бумаги, а затем разрежьте по одной из диагоналей и попробуйте наложить друг на друга образовавшиеся треугольники. Сделайте вывод.

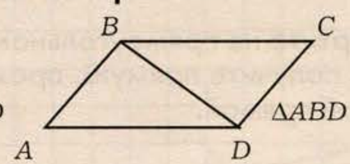
- Сформулируйте свойства четырёхугольника, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется **параллелограммом**.



$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$



$\Delta ABD = \Delta BCD$

Свойства сторон, углов и диагоналей параллелограмма

Диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника.

Противоположные стороны параллелограмма равны.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

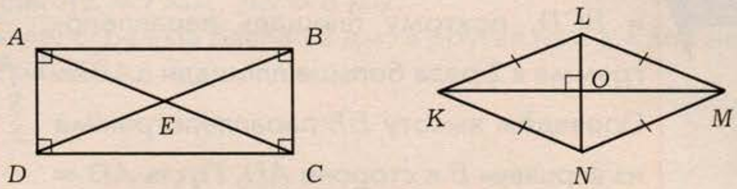
Каждое из свойств параллелограмма, набранных жирным шрифтом, – характеристическое. Про каждое из этих свойств можно сказать, что из всех четырёхугольников им обладает только параллелограмм.

Другими словами:

1) если в четырёхугольнике $ABCD$ $AB=CD$ и $BC=AD$, то $ABCD$ – параллелограмм; 2) если в четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A=\angle C$ и $\angle B=\angle D$, то $ABCD$ – параллелограмм; 3) если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Виды параллелограммов

Некоторые виды параллелограммов имеют особые названия. Параллелограммом является уже знакомый вам прямоугольник (левый чертёж). Он отличается от других параллелограммов тем, что все его углы прямые, а также тем, что его диагонали равны.



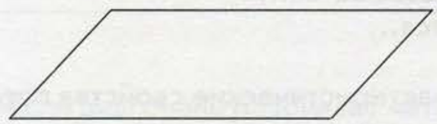
Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом (правый чертёж). Диагонали ромба перпендикулярны.

Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните, как найти площадь произвольного треугольника.
- Вырежьте из бумаги два равных, но не прямоугольных и не равнобедренных треугольника. Сложите из них параллелограмм.

Открываем новые знания

- Найдите площадь полученного параллелограмма.
- Найдите площадь параллелограмма на чертеже.

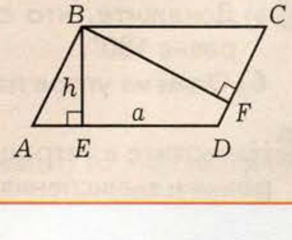


- Как найти площадь параллелограмма?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Высота параллелограмма

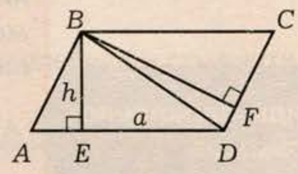
Высотой параллелограмма называется любой общий перпендикуляр двух его противоположных сторон. Чаще всего высоту проводят так, чтобы один из её концов совпадал с вершиной параллелограмма.



Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит его на равные треугольники ABD и BCD, поэтому площадь параллелограмма в 2 раза больше площади ΔABD. Проведём высоту BE параллелограмма из вершины B к стороне AD. Пусть $AD = a$, $BE = h$. По известной нам формуле площадь ΔABD равна $\frac{1}{2}ah$, а значит, площадь параллелограмма $ABCD$ равна ah, что и требовалось доказать.



$S_{ABCD} = AD \cdot BE$

$S_{ABCD} = CD \cdot BF$

Развиваем умения

Н

1 Продолжите предложения.

а) Параллелограмм – это...

б) Треугольники, на которые параллелограмм разбивается диагональю, ...

в) Противоположные углы параллелограмма...

г) Ромбом называется...

д) Прямоугольником называется...

е) Квадратом называется...

2 а) Сформулируйте характеристические свойства параллелограмма.

б) Запишите формулу для нахождения периметра параллелограмма.

в) Запишите формулу для нахождения площади параллелограмма.

3 В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Найдите диагонали параллелограмма, если $AE = 3$ дм, $BE = 5$ дм.

4 а) Найдите периметр параллелограмма со сторонами 3 см и 4,5 см.

б) Периметр параллелограмма равен 29 м, а одна из его сторон равна 9 м. Найдите другую сторону.

5 а) Докажите, что сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

б) Один из углов параллелограмма равен 50°. Найдите все остальные углы.

6 Начертите в тетради произвольный параллелограмм. Проведя необходимые измерения и вычисления, найдите его периметр и площадь.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Найдите длины отрезков AC и DE, если $AE = 7$ мм, $BE = 8$ мм.

б) Одна сторона параллелограмма равна 12 дм, а другая на 4 дм короче. Найдите периметр параллелограмма.

П **Вариант II.**

а) В параллелограмме высоты равны 12 м и 18 м, а одна из сторон равна 30 м. Найдите другую сторону. Сколько решений имеет задача?

б) Четырёхугольники $ABCD$ и $ABEC$ – ромбы. Найдите величину угла ABC.

Тренировочные упражнения.

Н

7 Периметр параллелограмма равен 24 м. Найдите его стороны, если известно, что одна из них в 3 раза длиннее другой.

8 Периметр параллелограмма равен 12 м. Найдите его стороны, если известно, что одна из них на 2 м длиннее другой.

9 Верно ли высказывание «Диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника»?

П

10 Верно ли высказывание «Если диагональ разбивает четырёхугольник на два равных треугольника, то этот четырёхугольник параллелограмм»?

11 Параллелограмм разрезали на четыре треугольника по диагоналям. Площадь одного из треугольников равна 12 см^2. Найдите площадь параллелограмма.

12 Постройте квадрат с диагональю 7 см.

13 Постройте ромб с диагоналями 6 см и 5 см.

М

14 Постройте ромб с диагональю 6 см и стороной 5 см.

15 Верно ли высказывание «Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник»? Обоснуйте свой ответ.

Н

16 В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC. На прямой AM взята такая точка K, что $MK = AM$. Докажите, что четырёхугольник $ABKC$ – параллелограмм.

17 В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина стороны AD, а точка L – середина стороны BC, причём $KBLD$ – прямоугольник с площадью 20 м^2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

18 Верно ли высказывание «Если стороны параллелограмма равны, то этот параллелограмм – ромб»?

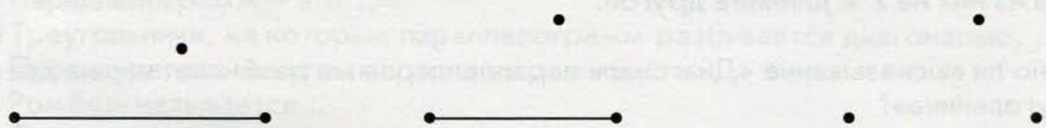
19 Верно ли высказывание «Если диагонали четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник – прямоугольник»?

П

20 Найдите площадь ромба с диагоналями 20 мм и 28 мм.

21 а) Постройте параллелограмм, если изображена его сторона и точка пересечения диагоналей (левый чертёж). Сколько решений имеет задача?

б) Постройте параллелограмм, если изображена его сторона и вершина, не принадлежащая этой стороне (средний чертёж). Сколько решений имеет задача?



в) Постройте параллелограмм, если изображены три его вершины (правый чертёж). Сколько решений имеет задача?

При построении параллельных прямых пользуйтесь линейкой и угольником. При откладывании равных отрезков пользуйтесь циркулем.

М

22 а) Постройте параллелограмм, один из углов которого равен 45°, а стороны равны 3 см и 5 см.

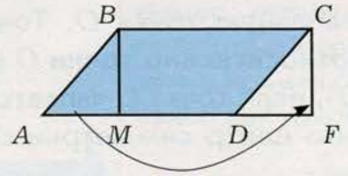
б) Постройте параллелограмм, диагонали которого равны 4 см и 6 см и пересекаются под углом 40°.

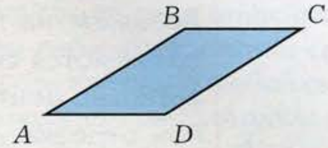
в) Постройте параллелограмм, диагональ которого равна 5 см, а стороны равны 2 см и 4 см.

23 Верно ли высказывание «Если стороны четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник – ромб»? Обоснуйте свой ответ.

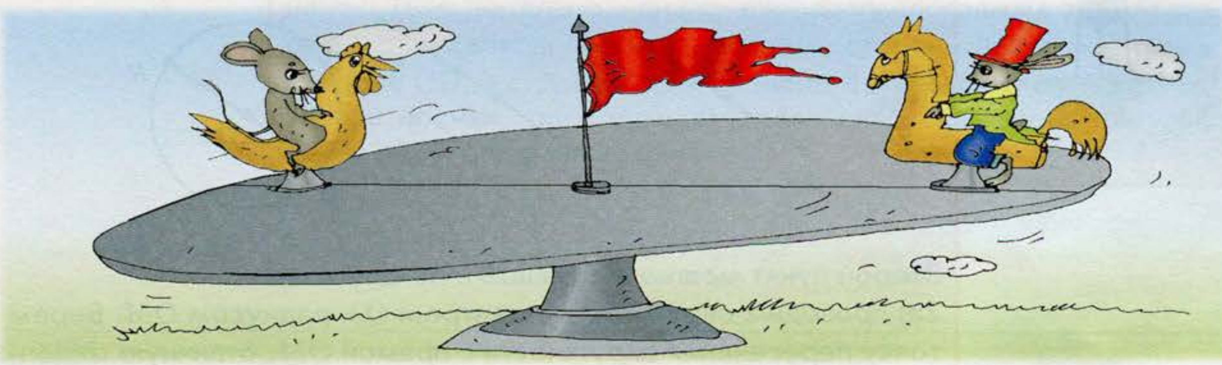
24 Вася прочитал в одном учебнике вывод формулы для площади параллелограмма. В параллелограмме $ABCD$ проводилась высота BM, после чего треугольник ABM отрезался от параллелограмма и затем приклеивался к нему в положении DCF

(левый чертёж). После такой перекройки площадь параллелограмма $ABCD$ оказывалась равной площади прямоугольника $MBCF$. Вася начертил свой параллелограмм $ABCD$ (правый чертёж) и решил выполнить такие же построения. Удастся ли ему это сделать?



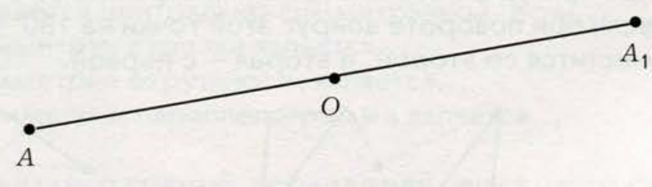


3.4 Центральная симметрия



Вспоминаем то, что знаем

- Точки A и A_1 на чертеже **симметричны относительно точки** O.



Открываем новые знания

- Измерьте и сравните длины отрезков OA и OA_1.
- Изобразите точку Q. Возьмите любую точку P и постройте точку, симметричную ей относительно точки Q.

?!

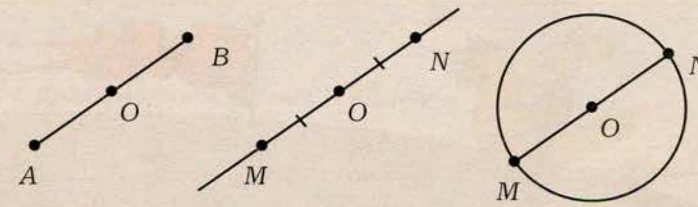
- Какие точки называются симметричными относительно точки O?

Возьмём на плоскости произвольную точку O. Точки A и B называются **симметричными относительно точки** O (или относительно **центра симметрии** O), если точка O является серединой отрезка AB. Считается, что центр симметрии симметричен самому себе.

Если центр симметрии O выбран, то для построения точки, симметричной данной точке M:

1) строим прямую OM;

2) откладываем от точки O на луче, дополнительном к лучу OM, отрезок ON, равный отрезку OM.



Второй пункт можно выполнить и по-другому:

2а) проводим окружность с центром O и радиусом OM. Берём точку пересечения окружности с прямой OM, отличную от точки M.

Действия, изложенные в пункте 2а), позволяют заключить, что если точку M повернуть на 180° вокруг точки O, то получим симметричную ей точку.

Две фигуры называются симметричными относительно точки, если при повороте вокруг этой точки на 180° первая фигура совместится со второй, а вторая – с первой.

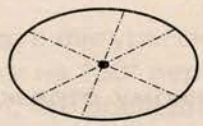
Или: если для каждой точки первой фигуры симметричная ей точка принадлежит второй фигуре, и наоборот, для каждой точки второй фигуры симметричная ей точка принадлежит первой фигуре.

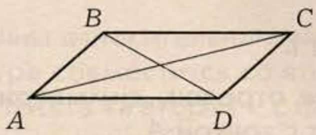
Фигура, симметричная отрезку, – это равный ему отрезок. Поэтому для построения отрезка, симметричного данному, достаточно построить точки, симметричные концам отрезка, а затем начертить отрезок с концами в этих точках (правый чертёж).

Центрально-симметричные фигуры

Фигуры, симметричные относительно точки, равны.

Возможен случай, когда фигура, симметричная данной фигуре относительно точки, совпадает с ней самой (левый чертёж). Например, окружность симметрична самой себе относительно своего центра; отрезок симметричен себе относительно своей середины; прямая симметрична себе относительно любой своей точки. Такие фигуры называются *центрально-симметричными*.





Центрально-симметричной фигурой является параллелограмм, причём центром симметрии является точка пересечения диагоналей. Действительно, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому сторона AB симметрична стороне CD, а сторона BC – стороне AD (правый чертёж).

Любая прямая, проходящая через центр симметрии фигуры, делит её на две равные фигуры.

Развиваем умения

Н

1 Продолжите предложения.

а) Точки K и L называются симметричными относительно точки M, если…

б) Две фигуры называются симметричными относительно точки, если…

в) Фигуры, симметричные относительно точки, …

г) Фигура называется центрально-симметричной, если…

д) Центром симметрии отрезка является…

е) Центром симметрии окружности является…

ж) Центром симметрии параллелограмма является…

2 а) Что можно сказать о прямой, проходящей через центр симметрии фигуры?

б) Расскажите, как связаны между собой симметрия относительно точки и поворот на 180° вокруг этой точки.

3 Отметьте две произвольные точки A и B.

а) Постройте точку, симметричную точке A относительно точки B.

б) Постройте точку, симметричную точке B относительно точки A.

4 Верно ли, что круг является центрально-симметричной фигурой?

5 Какие из заглавных букв русского алфавита имеют центр симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

6 Может ли фигура иметь более одного центра симметрии?

7 Верно ли, что четырёхугольник, у которого есть центр симметрии, обязательно является параллелограммом?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB, если центр симметрии совпадает с точкой A.

б) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке M, а сторону CD в точке N. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $AMND$ равна 48 м^2.

П **Вариант II.**

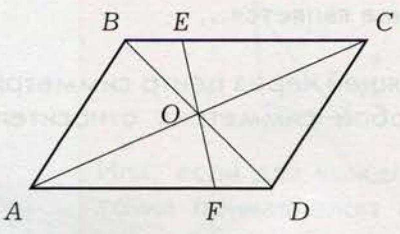
а) Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB, если центр симметрии лежит на прямой AB вне отрезка AB.

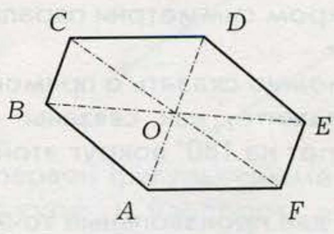
б) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке M, а сторону CD в точке N. Верно ли, что четырёхугольник $AMCN$ – параллелограмм? Обоснуйте свой ответ.

Тренировочные упражнения.

Н

8 На левом чертеже изображён параллелограмм $ABCD$. Назовите фигуры, симметричные относительно точки O: а) точке A; б) отрезку AB; в) отрезку BE; г) $\Delta\, ABO$; д) $\Delta\, FOD$; е) четырёхугольнику $ABEF$; ж) четырёхугольнику $DOEC$.





9 На правом чертеже изображён шестиугольник $ABCDEF$, о котором известно, что он имеет центр симметрии O.

а) Докажите, что противоположные стороны шестиугольника равны, т.е. $AB = DE$; $BC = EF$; $CD = FA$.

б) Докажите, что противоположные углы шестиугольника равны, т.е. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$.

П

10 Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB, если центр симметрии: а) совпадает с серединой отрезка AB; б) лежит внутри отрезка AB и не совпадает с его серединой.

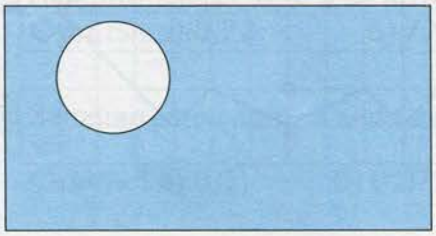
11 Постройте окружность, симметричную данной окружности, если центр симметрии: а) совпадает с центром окружности; б) лежит вне окружности; в) лежит на окружности; г) лежит внутри окружности, но не совпадает с её центром.

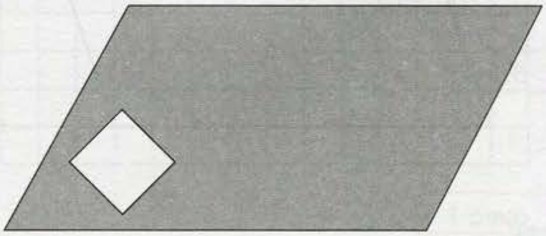
12 Прочитав в учебнике, что две фигуры симметричны относительно точки, если при повороте вокруг этой точки на 180° первая фигура совместится со второй, а вторая – с первой, Валя решил, что последняя часть текста «а вторая – с первой» лишняя, её можно отбросить, потому что она следует из первой части текста. Прав ли Валя?

13 Прочитав в учебнике, что две фигуры симметричны относительно точки, если для каждой точки первой фигуры симметричная ей точка принадлежит второй фигуре и, наоборот, для каждой точки второй фигуры симметричная ей точка принадлежит первой фигуре, Вася решил, что часть текста, начиная со слова «наоборот», лишняя, её можно отбросить, потому что она следует из первой части текста. Прав ли Вася?

М

14 На левом чертеже изображён прямоугольник, из которого вырезан круг, а на правом – параллелограмм, из которого вырезан квадрат.





Для каждой закрашенной фигуры проведите прямую, делящую её на две части, имеющие равные площади.

15 Верно ли, что в предыдущей задаче полученные части фигур не только имеют равные площади, но и равны между собой?

Н

16 Какие из заглавных букв латинского алфавита имеют центр симметрии?
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

17 Могут ли два непараллельных отрезка быть симметричны друг другу относительно некоторой точки?

18 Верно ли, что два отрезка, симметричные друг другу относительно некоторой точки, параллельны?

П

19 Имеет ли центр симметрии пара параллельных прямых?

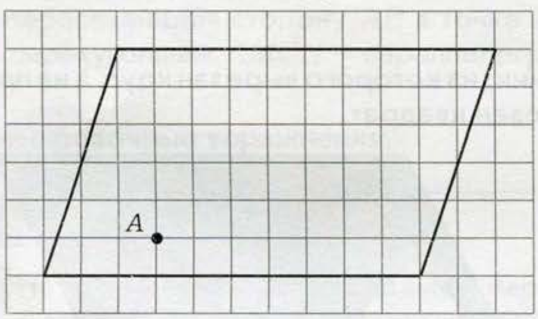
20 Имеет ли центр симметрии пара пересекающихся прямых?

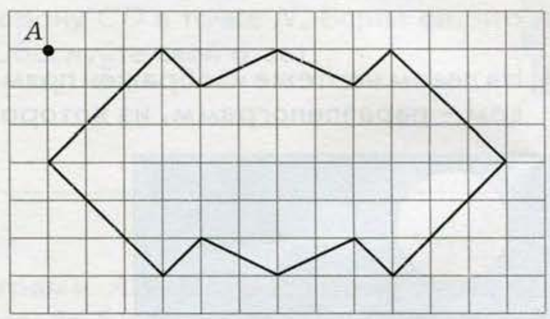
21 Имеет ли центр симметрии какой-нибудь треугольник?

22 Постройте треугольник, симметричный данному треугольнику ABC, если центр симметрии: а) лежит вне треугольника ABC; б) совпадает с точкой A; в) совпадает с серединой стороны AB; г) лежит на стороне AB, но не совпадает с её серединой; д) лежит внутри треугольника ABC.

М

23 Проведите через точку A прямую, делящую фигуру на две равные фигуры.





24 Два шестиклассника играют в такую игру. Они по очереди кладут на прямоугольный стол одинаковые пятирублёвые монеты, причём новую монету можно класть на любое свободное место так, чтобы она не налегала на положенные ранее монеты. Может ли начинающий гарантированно выиграть?

Итоговый тест

1 Выполните действия с дробями:
а) $12,1 - 9,75$; б) $134,09 + 97,97$; в) $1,84 \cdot 3,9$; г) $1,32 : 0,024$.

1 верный результат – 1 очко

2 Выберите истинное высказывание:
а) $5,679 > 56,79$; б) $9,82 < 8,29$; в) $14,2001 > 14,199999$.

1 очко

3 Выберите ложное высказывание:
а) 0,001 га = 0,1 а; б) 0,52 т = 5,2 ц; в) 8,003 км = 800,3 м.

2 очка

4 Найдите 0,34 от числа 17,3.
Ответы: а) 58,82; б) 5,882; в) 0,5882.

1 очко

5 Найдите число, 0,075 от которого равно 9,6.
Ответы: а) 0,72; б) 72; в) 128.

1 очко

6 Запишите число $\frac{3}{8}$ в виде десятичной дроби.
Ответы: а) 0,3; б) 0,375; в) 0,38.

1 очко

7 Запишите число 12,56 в виде обыкновенной дроби.
Ответы: а) $12\frac{5}{6}$; б) $12\frac{23}{40}$; в) $12\frac{14}{25}$.

1 очко

8 Округлив слагаемое до нужного разряда, вычислите с точностью до сотых: $15,37509 + 0,0981$.
Ответы: а) 15,47319; б) 15,47; в) 15,48.

2 очка

9 Сколько из заглавных букв латинского алфавита имеют центр симметрии?
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Ответы: а) 6; б) 7; в) 8 .

3 очка

Исторические страницы

Идея, на которой основано понятие десятичной дроби, – не писать знаменателей и выполнять действия максимально похожие на действия над целыми числами – появилась ещё у древних вавилонян. Правда, их дроби были не десятичными, а шестидесятиричными, а система выполнения действий не была полностью разработана; особые трудности вызывало деление.

Начиная с III века н.э. десятичные дроби стали появляться у китайских математиков, но в основном лишь для записи чисел; действия с такими дробями выполнялись лишь эпизодически, и общей системы правил не было.

В 953 году н.э. появилось сочинение аль-Укл идиси из Дамаска «Книга разделов об индийской арифметике». Не давая общего описания системы десятичных дробей и их свойств, автор рассмотрел примеры их употребления в некоторых вычислениях. Целую часть он отделял от дробной апострофом сверху. Однако трактат аль-Уклидиси не оказал влияния на современников, и десятичные дроби не получили распространения.

Подробное описание системы десятичных дробей и правил выполнения операций над ними было дано в сочинении «Ключ арифметики» аль-Каш и из Самарканда (1427 г.). Его целью было добиться выполнения действий над дробями как над целыми числами. Дробную часть аль-Каши отделял от целой чертой или писал другим цветом. Он не только сформулировал основные правила действий с десятичными дробями, но и начал регулярно применять десятичные дроби при решении задач.

Использование десятичных дробей в Европе началось после выхода сочинения голландского математика и инженера Симона Ст евина «Десятая» (1585 г.).

Первоначальные геометрические понятия были известны многим народам древности, но развитие геометрии как науки началось в Древней Греции. Своеобразной энциклопедией математических знаний того времени стало сочинение Евкл ида «Начала» (IV–III вв. до н.э.). В нём, в частности, изложена стройная система древнегреческой геометрии. Она основывалась на результатах, полученных многими геометрами более раннего времени.

Ещё в Древней Греции считалось, что равенство вертикальных углов впервые доказал Фал ес из Мил ета (VI в. до н.э.). Теория параллельных прямых и свойства параллелограмма были подробно изучены Пифаг ором и его учениками (V в. до н.э.). В это же время появились представления о симметрии (само это слово в переводе с греческого означает «соразмерность»).

Любителям математики

1. После окончания занятия в шахматной секции тренер опросил всех ребят, сколько партий сыграл сегодня каждый из них. Шестеро ответили, что сыграли по две партии, и трое – что сыграли по три партии. Могли ли все сказать правду? Если да, то сколько всего партий было сыграно? Если нет, то почему?

2. В двух кошельках лежит 100 рублей, причём в одном из них денег вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

3. У шестиклассника 10 учебных предметов. Его средний балл за первую четверть 4,6. Сколько у него «троек», «четвёрок» и «пятёрок», если известно, что есть все эти оценки?

4. Имеются две деревянные палочки. Можно прикладывать палочки друг к другу и делать засечки на любой палочке. Придумайте, как узнать, что больше: длина первой палочки или $\frac{2}{3}$ длины второй палочки?

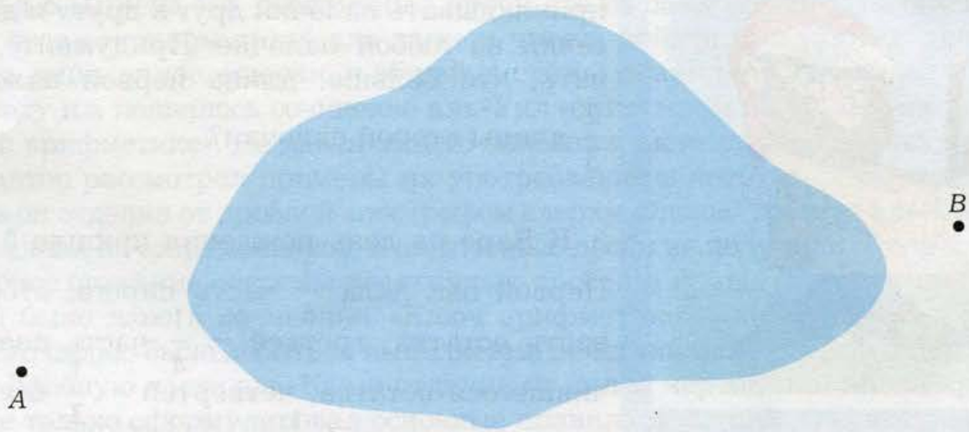
5. К Варе на день рождения пришли 5 девочек. Первой она дала $\frac{1}{6}$ часть пирога, второй – $\frac{1}{5}$ часть остатка, третьей – $\frac{1}{4}$ часть вновь получившегося остатка, четвёртой – $\frac{1}{3}$ следующего остатка и пятой – $\frac{1}{2}$ последнего остатка. Какая из девочек получила наибольший кусок пирога?

6. В квадрате 7×7 клеточек закрасьте некоторые клеточки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по три закрашенные клеточки.

7. 10 мальчиков и 10 девочек разбили на пары мальчик – девочка так, что в каждой паре мальчик оказался выше девочки. После этого их разбили на пары мальчик – девочка по-другому. Может ли теперь оказаться, что в девяти парах из десяти девочка выше мальчика?

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Требуется определить расстояние между двумя точками на местности, разделёнными прудом.



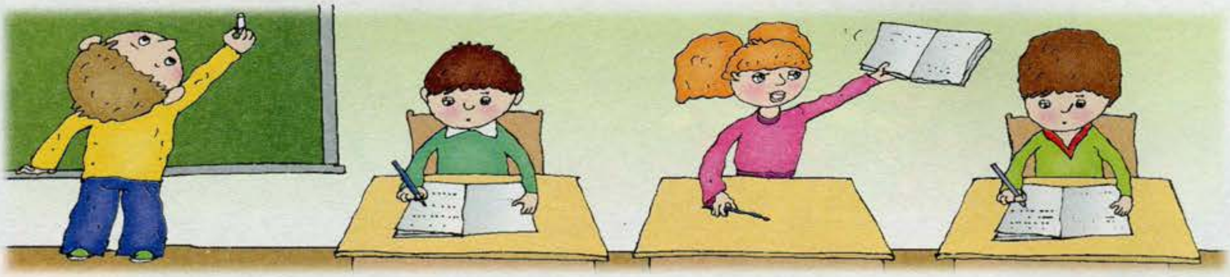
ВАША РОЛЬ. Землемер.

ОПИСАНИЕ. Надо на местности измерить расстояние между точками A и B. Преграда в виде пруда не даёт вам возможности проложить отрезок AB и выполнить измерения непосредственно.

ЗАДАНИЕ. Определите это расстояние на местности без использования планов и карт (они отсутствуют).

РАЗДЕЛ II **ПРОПОРЦИИ И ПРОЦЕНТЫ**

Входной тест



1 Найдите 1,62 от числа 30,5.
Ответы: а) 49,41; б) 49,401; в) 49,041; г) 49,041.

1 очко

2 Найдите число, 0,36 от которого равно 16,2.
Ответы: а) 50,4; б) 45; в) 40,5; г) 54.

1 очко

3 Какую часть от числа 640 составляет число 224?
Ответы: а) 0,35; б) 0,38; в) 0,4; г) 0,45.

1 очко

4 Для окраски стены смешали 3 части синей и 4 части зелёной краски. Сколько взяли синей краски, если зелёной было взято 300 г?
Ответы: а) 225 г; б) 250 г; в) 320 г; г) 400 г.

1 очко

5 Известно, что для приготовления фруктово-ореховой смеси на каждые две части орехов берётся три части фруктов. Сколько орехов в 600 г такой смеси?
Ответы: а) 200 г; б) 240 г; в) 360 г; г) 400 г.

2 очка

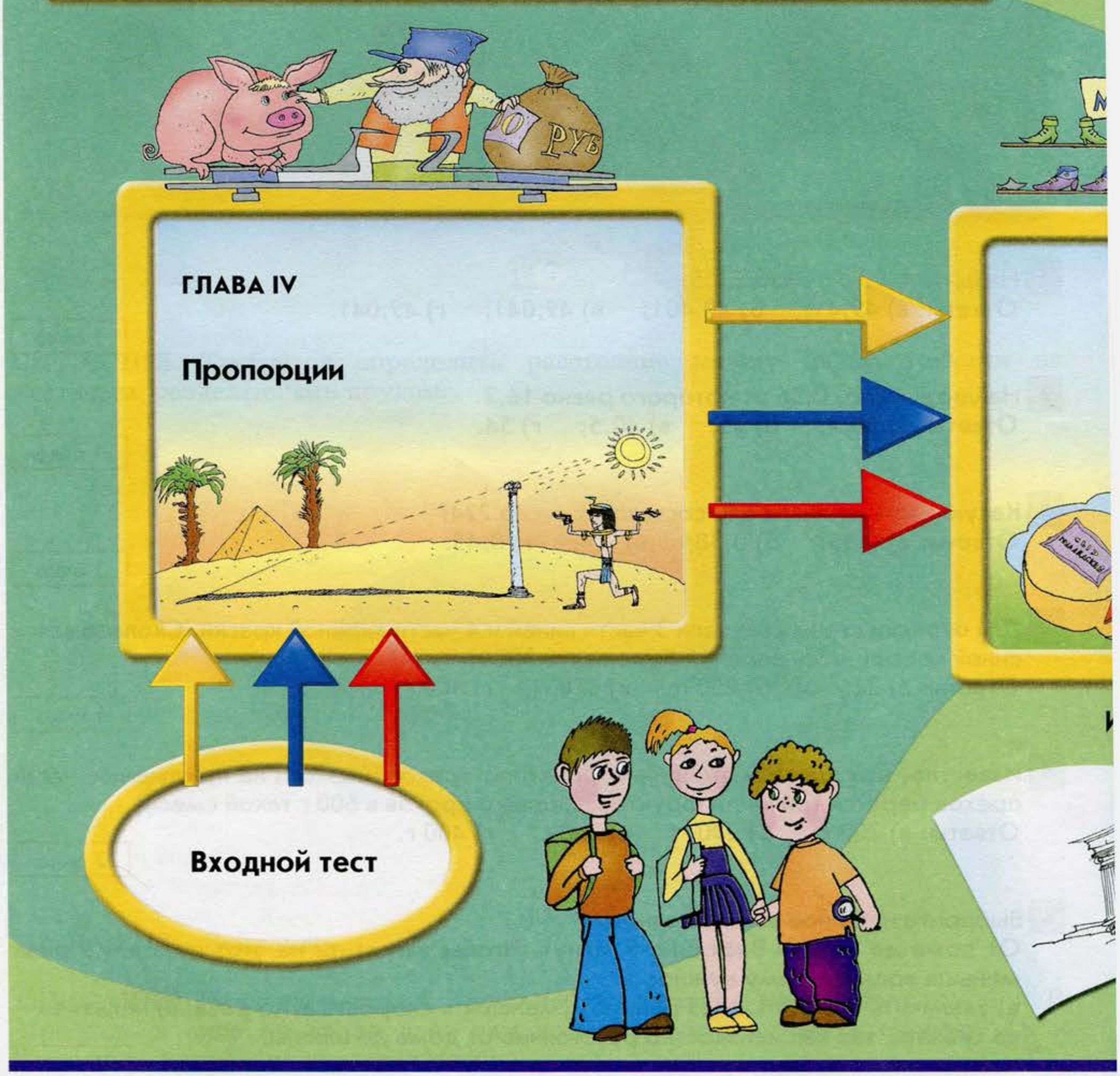
6 Выберите истинное высказывание.
От дома до школы Вася шёл 9 минут. Чтобы затратить на этот путь в 1,5 раза меньше времени, ему нужно:
а) увеличить скорость в 1,5 раза; б) уменьшить скорость в 1,5 раза; в) нельзя точно сказать, так как неизвестно расстояние от дома до школы.

2 очка

7 Есть две карты: старая с масштабом 1 : 1 000 000 и новая с масштабом 1 : 200 000.
Расстояние между пунктами *A* и *B* на новой карте:
а) в 2 раза больше, чем на старой; б) в 5 раз больше, чем на старой;
в) в 5 раз меньше, чем на старой; г) нельзя точно сказать.

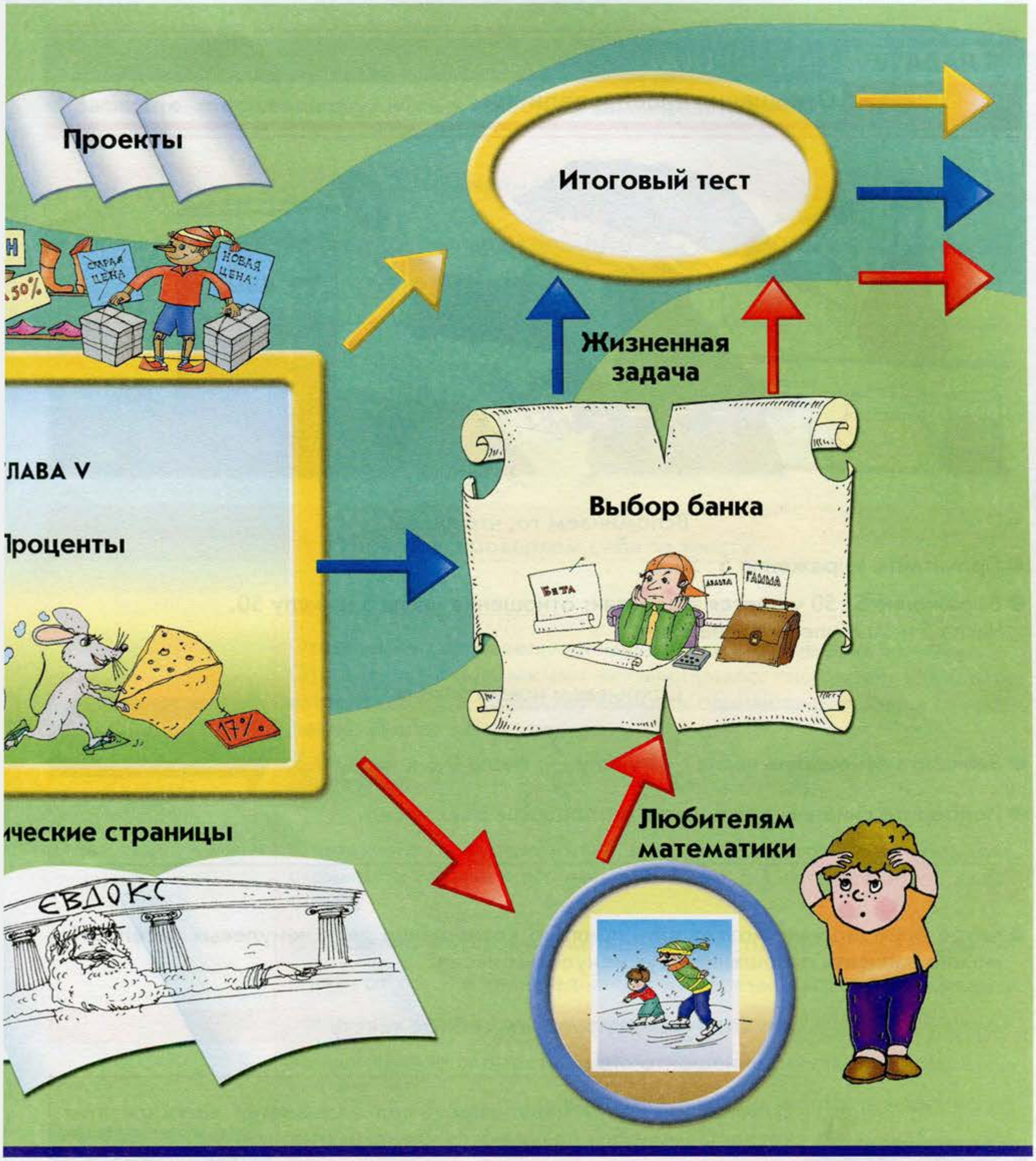
3 очка

Путеводитель по второму разделу



Путь 1:
а) входной тест;
б) главы;
в) итоговый тест.

Путь 2:
а) входной тест;
б) главы;
в) жизненная задача;
г) итоговый тест.



Путь 3:

а) входной тест;

б) главы;

в) задачи для любителей математики;

г) жизненная задача;

д) итоговый тест.

ГЛАВА IV **ПРОПОРЦИИ**

4.1 Отношения чисел и величин

Вспоминаем то, что знаем

- Прочитайте выражение 5 : 50.
- Выражение 5 : 50 читается ещё и так: отношение числа 5 к числу 50. Числа 5 и 50 – члены отношения.

Открываем новые знания

- Запишите отношение числа $\frac{1}{2}$ к числу $\frac{2}{3}$; числа 0,6 к числу 0,3.
- Подберите синоним для понятия *отношение* двух чисел.

?!

- Какое определение можно дать понятию «отношение двух ненулевых чисел»? Как можно записать отношение двух ненулевых чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Отношение чисел

Отношением двух ненулевых чисел называется *частное* этих чисел. Сами числа называются **членами отношения**.

Например, отношение числа 5 к числу 3 можно записать в виде 5 : 3 или $\frac{5}{3}$.

Отношение числа $\frac{1}{5}$ к числу $\frac{1}{3}$ можно записать в виде $\frac{1}{5} : \frac{1}{3}$.

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите отношение двух любых известных вам чисел, не равных 0.

Открываем новые знания

- Запишите отношения следующих пар величин: 10 км к 2 км; 10 км к 2 ч. Чему равны эти отношения?

?!

- Чем выражается отношение 10 км : 2 км?
- Как называется отношение 10 км : 2 ч?
- Чем является отношение двух величин?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Отношение величин

Отношением двух величин называется частное этих величин. Отношение *одноимённых* величин (масс, площадей, длин, стоимостей и т.д.), представленных в одинаковых единицах измерения, выражается *числом*.

Например, $\frac{5\,\text{см}}{3\,\text{см}} = \frac{5}{3}$; $\frac{4\,\text{т}}{2\,\text{ц}} = \frac{40\,\text{ц}}{2\,\text{ц}} = 20.$

Отношение разноимённых величин как новая величина

Отношение *разноимённых* величин (расстояния и времени, стоимости товара и его количества и т.д.) является *новой величиной*.

Отношение расстояния ко времени есть *скорость*. В зависимости от того, в каких единицах измерены расстояние и время, получаются различные единицы измерения скорости. В самой записи единиц скорости видно отношение расстояния ко времени $\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}, \frac{\text{м}}{\text{с}} \text{ и т.д.}\right)$. Для удобства единицы скорости чаще всего записывают с помощью наклонной черты (км/ч, м/с и т.д.).

Например, путь измерен в километрах, а время – в часах, тогда скорость будет выражена в километрах в час: $\frac{50\,\text{км}}{2\,\text{ч}} = \frac{50}{2}\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 25\,\text{км/ч}.$

Отношение стоимости покупки к количеству, массе, длине и т.д. купленного товара есть *цена* этого товара.
Например, стоимость покупки выражена в рублях, а количество – в килограммах, тогда цена будет выражена в рублях за килограмм.
Обратите внимание, что при этом не пишут 120 р/кг, а пишут 120 р за 1 кг, и т.д. Различие в записи скорости и цены не имеет никаких особых причин – так исторически сложилось, и это следует просто запомнить.

Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните основное свойство дроби. Запишите несколько дробей, равных дроби $\frac{6}{9}$.

Открываем новые знания

- Верны ли записи: $20 : 10 = 4 : 2$; $20 : 10 = 200 : 100$? Почему?

- Как можно сформулировать данное свойство отношения?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Основное свойство отношения: **если оба члена отношения умножить или разделить одновременно на одно и то же ненулевое число, то отношение не изменится.**
Действительно, отношение чисел a и b – это $a : b$ или $\frac{a}{b}$, а нам известно, что

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : d}{b : d}, \text{ где } c \neq 0,\ d \neq 0.$$

С помощью основного свойства отношения можно отношение дробных чисел заменить равным ему отношением целых чисел. Для этого оба члена отношения умножают на общий знаменатель дробей.
Например: задано отношение числа $\frac{7}{9}$ к числу $\frac{5}{12}$.

$$\frac{7}{9} : \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 36}{9} : \frac{5 \cdot 36}{12} = 28 : 15.$$

Тот же результат получится, если первый член отношения разделить на второй:

$$\frac{7}{9} : \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot \cancel{12}^{4}}{{}_{3}\cancel{9} \cdot 5} = \frac{28}{15}.$$

Вспоминаем то, что знаем

- Как можно сравнить 15 и 10; 9 и 6; 1 050 и 1 000?
- Как сравнить величины 15 мин и 10 мин; 9 км и 6 км?

Открываем новые знания

- В прошлом году в школьном конкурсе бальных танцев участвовали 12 человек, а в этом году на 6 человек больше.
- Как узнать, большой ли это прирост?

?!

- Что показывает отношение двух чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

При сравнении двух чисел иногда недостаточно знать, какое число больше или меньше другого; часто возникает необходимость знать, *на сколько* или *во сколько раз* одно число больше или меньше другого. Такое сравнение чисел называется соответственно *разностным сравнением* и *кратным сравнением*.

Например, путь от подъезда до входа в школу составляет 150 м, если идти по аллее сквера, и 100 м, если идти дворами. Сравнивая эти данные, можно сказать, что путь по аллее на 50 м длиннее, а путь по дворам на 50 м короче ($150 - 100 = 50$). Можно также сказать, что путь по аллее в 1,5 раза длиннее, чем по дворам ($150 : 100 = 1{,}5$), или что путь дворами составляет $\frac{2}{3}$ от пути аллеей парка $\left(\frac{100}{150} = \frac{2}{3}\right)$.

Необходимость сравнения величин постоянно возникает при решении практических задач.

Сравнение при помощи деления используют в тех случаях, когда хотят качественно оценить ситуацию, используя при этом термин «отношение».

Например, известно, что число новорождённых и в городе N, и в городе M в этом году увеличилось на 100 человек. В каком из городов прирост новорождённых больше?

Ответ зависит от того, сколько новорождённых было в этих городах в прошлом году. В городе N в прошлом году родилось 100 детей, и, следовательно, в этом году новорождённых стало в 2 раза больше ($200 : 100 = 2$).

Можно сказать, что отношение числа детей, рождённых в городе N в этом году, к числу детей, рождённых в прошлом году, равно 2. Это достаточно большой прирост.

В городе M в прошлом году родилось 1 000 детей, и, следовательно, в этом году новорождённых стало в 1,1 раза больше (1 100 : 1 000 = 1,1).
Можно сказать, что отношение числа детей, рождённых в городе M в этом году, к числу детей, рождённых в прошлом году, равно 1,1, то есть их число не очень сильно изменилось.
Если первый член отношения больше второго, то отношение показывает, во сколько раз он больше.
Если первый член отношения меньше второго, то отношение показывает, какую часть от второго члена составляет первый.
Если члены отношения равны, то отношение равно единице.
Итак, *отношение двух различных чисел показывает, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого.*

Развиваем умения

Н

1 Прочитайте выражение, используя термин «отношение»:

а) 2 : 3; в) 1 : 200; д) 0,5 : 3,5;

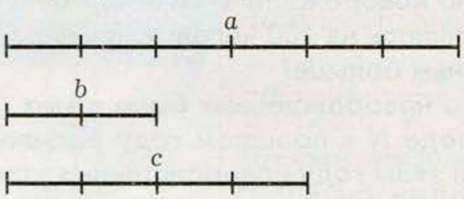
б) 15 : 17; г) 1 : 100 000; е) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$.

2 Запишите несколько отношений, равных: а) 3; б) 0,5; в) $\frac{3}{4}$.

3 Автомобиль проехал 75 км, и ему осталось ещё проехать 150 км.
а) Во сколько раз непройденное расстояние больше, чем пройденное?
б) Какую часть пройденное расстояние составляет от непройденного?
Составьте ещё несколько отношений, пользуясь данными задачи. Что показывают эти отношения?

4 Есть два ненулевых числа: a и b. Что показывает отношение $a : b$, если:
а) $a > b$; б) $a < b$?

5 На рисунке изображены отрезки a, b, c.



Найдите отношение: $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{a}{c}$; $\frac{c}{a}$; $\frac{c}{b}$; $\frac{b}{c}$.

Что показывает каждое из этих отношений?

6 Могут ли длины сторон квадрата относиться, как:
а) 5 : 5; б) 2 : 2; в) 3 : 2?

7 а) Верно ли, что если увеличить оба члена отношения на одно и то же число, то отношение не изменится? Обоснуйте свой ответ.
б) Верно ли, что для любого отношения дробных чисел можно записать равное ему отношение натуральных чисел?

8 Запишите отношение в виде дроби, упростив её, если это возможно:
а) 2 : 3; в) 56 : 49; д) 500 : 800;
б) 35 : 700; г) 520 : 460; е) 27 : 81.

9 Замените отношение дробных чисел равным ему отношением натуральных чисел.
а) $\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{7} : \frac{4}{3}$; д) $1\frac{3}{11} : \frac{11}{3}$;
б) $\frac{12}{15} : 1\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2} : 2\frac{3}{8}$; е) $\frac{7}{8} : \frac{21}{32}$.

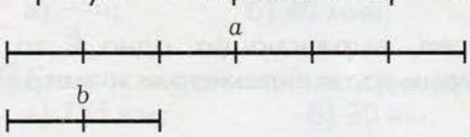
10 Выразите величины в одинаковых единицах измерения и упростите отношение:
а) $\frac{12\text{ м}}{18\text{ дм}}$; б) $\frac{18\text{ кг}}{540\text{ г}}$; в) $\frac{550\text{ кг}}{1\text{ т}}$; г) $\frac{500\text{ см}^3}{2\text{ дм}^3}$.

11 а) Найдите скорость машины, если пройденное ею расстояние равно 30 км, а время движения — $\frac{2}{5}$ ч.
б) Найдите цену товара, если его стоимость 100 р., а количество — $2\frac{1}{2}$ кг.
в) Найдите производительность труда рабочего, если он сделал 5 деталей за $\frac{1}{4}$ ч.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) На рисунке изображены отрезки a и b. Найдите отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$.



б) Замените отношение дробных чисел равным ему отношением целых чисел:
$0{,}125 : 0{,}5$; $\frac{4}{5} : \frac{2}{15}$.

П **Вариант II.**

а) Найдите отношение, не равное двум другим: 45 : 9; 5 : 15; $\frac{2}{5} : \frac{2}{25}$.
б) Сравните числа a и b, если $\frac{a}{b} < 1$.

Тренировочные упражнения.

Н

12 Прочитайте каждое отношение и, если возможно, упростите его:

а) $135 : 9$; в) $2{,}16 : 0{,}3$; д) $3\frac{1}{5} : 1\frac{3}{5}$;

б) $185 : 74$; г) $2{,}5 : 3{,}6$; е) $8\frac{3}{17} : 2\frac{1}{7}$.

13 В тетради 24 чистых и 6 исписанных страниц. Что показывает отношение $24 : 6$? Что показывает отношение $6 : 24$?

14 После осмотра клумб на пришкольном участке выяснилось, что отношение числа распустившихся тюльпанов к числу взошедших равно $\frac{4}{5}$. Этот результат иногда описывают так: «каждые 4 из 5 тюльпанов распустились»; «каждый пятый тюльпан не распустился»; «из каждых пяти тюльпанов один не распустился»*.

Опишите аналогичным образом следующие ситуации:

а) отношение числа решённых задач к числу нерешённых равно $\frac{3}{4}$;

б) отношение числа пропущенных шайб к числу бросков по воротам равно $\frac{1}{5}$.

15 Расстояние в 1,5 км пешеход прошёл за 20 мин. Чему равна его скорость? Ответ выразите в следующих единицах измерения:

а) км/ч; б) км/мин; в) м/ч; г) м/мин; д) м/с.

П

16 Что представляет собой отношение двух чисел, выражающих одно и то же расстояние в разных единицах измерения (например, в километрах и метрах; в футах и аршинах и т.д.)?

17 Начертите отрезок AB. Отметьте на нём точку C таким образом, чтобы выполнялось условие:

а) $\frac{AC}{BC} = 1$; б) $\frac{AC}{BC} < 1$; в) $\frac{AC}{BC} > 1$; г) $\frac{AC}{BC} = 3$.

---

* Такие фразы не надо понимать буквально; они, безусловно, весьма неудачны, но, несмотря на это, время от времени употребляются, и поэтому необходимо познакомиться с такими фразами.

М

18 Вы знаете, что отношение пройденного расстояния ко времени, за которое оно пройдено, называется скоростью. (Говоря кратко, отношение расстояния ко времени есть скорость.) Скорость – хорошо знакомая вам величина. А что представляет собой отношение времени к расстоянию? Что показывает эта величина? В каких единицах она измеряется?

Н

19 Прочитайте отношение и, если возможно, упростите его:

а) $100 : 25$; в) $25 : 100$; д) $\frac{5}{7} : \frac{1}{14}$;

б) $18 : 0{,}2$; г) $0{,}2 : 18$; е) $2\frac{4}{7} : 1\frac{15}{21}$.

20 а) На числовом луче отмечены точки $A(2)$ и $B(10)$. Найдите координату точки C, расположенной на отрезке AB, если известно, что $AC : CB = 3 : 1$.

б) На числовом луче отмечены точки $A(2)$ и $B(10)$. Найдите координату точки C, расположенной вне отрезка AB, если известно, что $AC : CB = 3 : 1$.

21 Начертите какой-нибудь прямоугольник, отношение сторон которого равно:
а) $1 : 2$; б) $2 : 3$; в) $1 : 1$.

22 Запишите отношение числа 3 к числу 5 в виде:
а) обыкновенной дроби;
б) частного;
в) десятичной дроби.

П

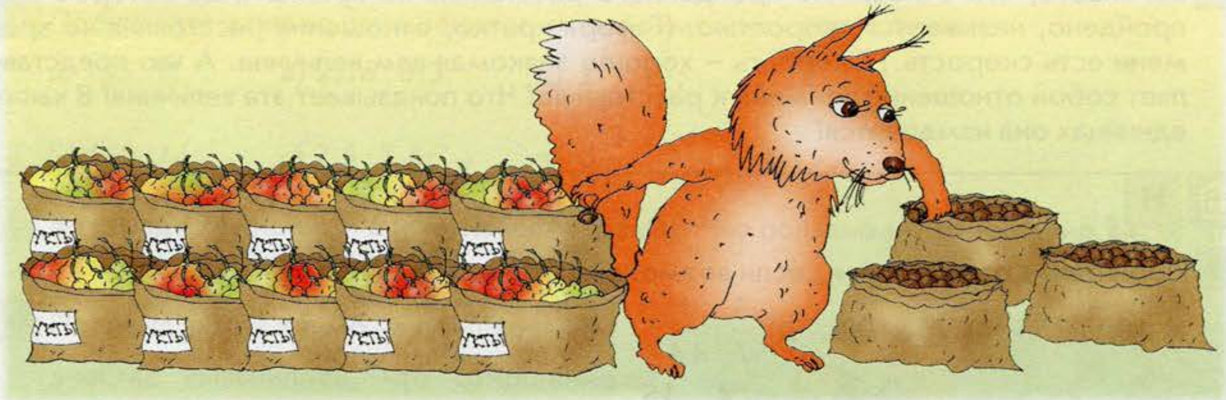
23 Скорость легковой автомашины 75 км/ч. Какой путь она проедет за:
а) $\frac{3}{4}$ ч; б) 40 мин; в) 50 мин; г) 135 мин?

24 Скорость легковой автомашины 1 500 м/мин. За сколько часов машина проедет:
а) 135 км; б) 30 км; в) 9 км; г) 54 км?

М

25 Из двух посёлков, расстояние между которыми равно 36 км, одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Через какое время они встретятся, если первый проезжает 1 км за 4 мин, а второй – за 5 мин?

4.2 Деление числа в данном отношении



Вспоминаем то, что знаем

- В кулинарной книге записано, что для приготовления фруктово-ореховой смеси на 10 частей фруктов следует взять 3 части орехов. Сколько граммов фруктов следует взять на 120 г орехов?

Открываем новые знания

- Фруктово-ореховая смесь состоит из фруктов и орехов, массы которых относятся, как 10 : 3. Масса смеси 520 г. Чему равна масса фруктов и масса орехов в этой смеси?

?!

- Как разделить число 520 в отношении 10 : 3?
- Похожи ли эти задачи? Чем именно?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

При решении практических задач часто возникает необходимость разделить величину на части, отношение которых задано (разделить величину в заданном отношении).
Рассмотрим и решим несколько таких задач.

Пример 1. В поваренной книге дан рецепт фруктово-молочного коктейля. В нём сказано, что сок и молоко нужно смешивать в отношении 2 : 3. Сколько нужно взять сока и молока, чтобы приготовить 500 г такого коктейля?

Решение: очевидно, что если 500 г коктейля представлять как целое, то в нём будет 2 части сока и 3 части молока. Таким образом, мы приходим к уже известной нам задаче на части. Всего имеется $2 + 3 = 5$ (частей). Если на 5 частей приходится 500 г, то на каждую часть $500 : 5 = 100$ (г). Тогда сока надо взять $100 \cdot 2 = 200$ (г), а молока потребуется $100 \cdot 3 = 300$ (г).
Ответ: 200 г сока и 300 г молока.

Если два числа относятся как $m : n$, то удобно считать, что первое число содержит m одинаковых частей, а второе число — n таких же частей.

Во многих реальных задачах отношение, в котором нужно разделить число, не задано в явном виде, а его нужно установить самостоятельно, исходя из других данных задачи.

Пример 2. Два фермера сложили свои деньги для покупки трактора. Первый внёс 150 000 р., второй – 250 000 р. Через некоторое время они продали этот трактор за 320 000 р. Как им справедливо разделить между собой вырученные деньги?

Решение: вырученные деньги справедливо разделить в том же отношении, в котором были вложены деньги на покупку, т.е. 150 000 : 250 000, или 3 : 5.

Первый фермер должен получить:

$320\,000 : (3 + 5) \cdot 3 = 320\,000 : 8 \cdot 3 = 40\,000 \cdot 3 = 120\,000$ р.

Второй фермер должен получить:

$320\,000 : (3 + 5) \cdot 5 = 320\,000 : 8 \cdot 5 = 40\,000 \cdot 5 = 200\,000$ р.

Иногда число приходится делить не на две, а на бóльшее количество частей в данном отношении.

Пример 3. Три купца составили товарищество для ведения торгового дела. Первый купец внёс для этой цели 15 000 р., второй – 9 000 р., третий – 12 000 р.

По окончании торгового дела они получили общей прибыли 6 000 р. Сколько денег из этой прибыли следует получить каждому купцу?

Решение: прибыль следует разделить в том же отношении, в котором были вложены денежные средства: $15\,000 : 9\,000 : 12\,000 = 5 : 3 : 4$.

Первый купец должен получить:

$6\,000 : (5 + 3 + 4) \cdot 5 = 6\,000 : 12 \cdot 5 = 500 \cdot 5 = 2\,500$ р.

Второй купец должен получить:

$6\,000 : (5 + 3 + 4) \cdot 3 = 6\,000 : 12 \cdot 3 = 500 \cdot 3 = 1\,500$ р.

Третий купец должен получить:

$6\,000 : (5 + 3 + 4) \cdot 4 = 6\,000 : 12 \cdot 4 = 500 \cdot 4 = 2\,000$ р.

Развиваем умения

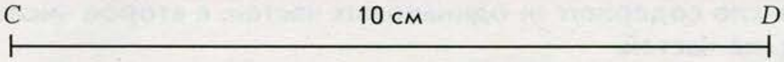
Н

1 а) Разделите отрезок AB в отношении 2 : 3, считая от точки A, отметив на нём точку M.

A 10 см B

Разделите отрезок AB в отношении 2 : 3, считая от точки B, отметив на нём точку N.

б) Разделите отрезок CD в отношении 2 : 3 : 5. Сколько решений имеет задача?



2 Начертите отрезок длиной 15 см. Разделите его в отношении 7 : 3.

3 а) Установка двери стоила 2 100 р. Мастер и его помощник разделили эти деньги в отношении 2 : 1. Сколько получил каждый?

б) Две девочки разделили между собой 16 тетрадей в отношении 3 : 5. Сколько тетрадей досталось каждой?

в) На выполнение домашнего задания по русскому языку и математике у ученика шестого класса ушло $\frac{2}{3}$ часа. Время, которое он затратил на выполнение задания по математике, относится ко времени, затраченному на выполнение задания по русскому языку, как 3 : 5. Сколько минут ушло на выполнение каждого из этих заданий?

г) Сплав состоит из меди и цинка, массы которых относятся как 4 : 3. Масса сплава – $2\frac{4}{5}$ кг. Сколько в этом сплаве цинка?

д) Вова, Ринат и Руслан сложили свои деньги для покупки маски для подводного плавания. Вова внёс 50 р., Ринат – 60 р., а Руслан – 40 р. Через некоторое время они продали эту маску за 90 р. Сколько денег следует получить каждому из ребят?

4 Постройте угол MNK и разделите его двумя лучами в отношении 2 : 3 : 5, если: а) $\angle MNK = 180°$; б) $\angle MNK = 90°$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Разделите число 90 в отношении: 4 : 5; 3 : 6; 2 : 3 : 4.

б) Сплав состоит из олова и свинца, массы которых относятся как 2 : 1. Масса сплава – 26,4 кг. Сколько в этом сплаве олова и сколько свинца?

П **Вариант II.**

а) Разделите число 42 в отношении: 2 : 5; $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$.

б) Для приготовления фарфора смешивают белую глину, песок и гипс в отношении 25 : 2 : 1. Определите массу каждого из этих веществ для приготовления 112 кг смеси.

Тренировочные упражнения.

Н

5 Разделите число 120 в отношении:

а) $2 : 4$; б) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$; в) $1{,}5 : 2{,}5$.

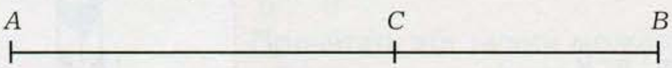
6 Два числа относятся, как $7 : 5$. Найдите эти числа, если:
а) их сумма равна 48; б) их разность равна 1.

7 Пять чисел относятся между собой, как $1 : 2 : 3 : 4 : 5$. Найдите эти числа, зная, что:
а) сумма первого и третьего чисел равна 40;
б) разность пятого и второго чисел равна 51.

8 Два числа относятся, как $2 : 7$. Найдите эти числа, если их произведение равно:
а) 14; б) 56.

П

9 Отрезки AC и AB относятся, как 3 к 5. Чему равно отношение:
а) $AC : CB$; б) $CB : AB$?



10 В математическом кружке занимаются мальчики и девочки. Отношение числа мальчиков к числу девочек при этом равно $5 : 4$. Определите:
а) чему равно отношение числа мальчиков к числу всех занимающихся в кружке;
б) какую часть от занимающихся в кружке составляют девочки.

М

11 Разделите число a в отношении $m : n$.

12 В квартире три комнаты: маленькая, средняя и большая. Их общая площадь – 75 $м^2$. При этом площадь большой комнаты на 5 $м^2$ больше, чем площадь средней, а площадь средней относится к площади маленькой, как $3 : 1$. Чему равна площадь каждой комнаты?

Н

13 Выберите равные между собой пары отношений.

а) $15 : 30$; в) $8{,}4 : 2{,}1$; д) $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$;

б) $120 : 30$; г) $1{,}5 : 0{,}5$; е) $\frac{1}{5} : \frac{1}{15}$.

14 Отношение длины комнаты к её ширине равно $4 : 3$.
а) Найдите площадь комнаты, если её длина равна 6 м.
б) Найдите площадь комнаты, если её длина больше ширины на 0,9 м.

15 В театральной студии занимаются мальчики и девочки. Отношение числа мальчиков к числу девочек равно 1 : 3.
а) Сколько в студии девочек, если мальчиков 4?
б) Сколько в студии мальчиков, если девочек на 12 больше?
в) Сколько в студии человек, если в ней 18 девочек?
г) На сколько девочек больше, чем мальчиков, если всего в студии 24 человека?

П

16 Постройте прямоугольник, у которого стороны относятся, как 5 : 8, а периметр равен 18,2 см.

17 Пирожные разложили в две коробки в отношении 7 : 4. Когда из одной коробки взяли 12 пирожных, то в коробках их стало поровну. Сколько пирожных было первоначально?

М

18 Разделите число a в отношении $m : n : k$.

4.3 Пропорции

Вспоминаем то, что знаем

- Прочитайте равенство $6 : 3 = 24 : 12$. Это равенство называется **пропорцией**. Числа 6; 3; 24; 12 – **члены пропорции**.

Открываем новые знания

- Как прочитать эту пропорцию, используя понятие «отношение»?
- Придумайте свой пример пропорции.
- Можно ли составить пропорцию из отношений 2 : 5 и 10 : 4?

?!

- Что называют пропорцией? Какие члены пропорции можно назвать крайними, а какие – средними?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Пропорция – это *верное* равенство двух отношений. Слово «пропорция» произошло от латинского *pro portio*, что означает «на порции, на части».

Пропорция может быть записана в виде $a : b = c : d$ или в виде $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Прочитать эти записи можно по-разному.
«Отношение a к b равно отношению c к d».
«Отношения a к b и c к d равны».
«a относится к b, как c относится к d».
Входящие в пропорцию четыре числа называются **членами пропорции.** В пропорции $a : b = c : d$ числа a и d называются **крайними членами пропорции**, а числа b и c – **средними членами пропорции.**

средние члены

$$a : b = c : d$$

крайние члены

Такие названия понятны из расположения чисел при записи пропорции в виде $a : b = c : d$, но они же используются и при записи пропорции в виде $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Названия «крайние члены» и «средние члены» относительны, достаточно записать пропорцию в обратном порядке (справа налево), как $c : d = a : b$, и бывшие крайние члены становятся средними, и наоборот.

Вспоминаем то, что знаем

- Найдите и сравните произведение крайних и произведение средних членов каждой из данных пропорций: 6 : 3 = 24 : 12; 1 : 5 = 17 : 85; 20 : 8 = 5 : 2.

Открываем новые знания

- Придумайте свой пример пропорции и проведите такую же работу. Какую закономерность вы увидели? Эта закономерность – основное свойство пропорции.

?!

- Сформулируйте и докажите основное свойство пропорции.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Основное свойство пропорции

Основное свойство пропорции:
в пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов.

При записи пропорции в виде $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ основное свойство часто формулируют так: **произведения членов пропорции крест-накрест равны между собой.**

Действительно, возьмём пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и приведём дроби к общему знаменателю bd: $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$. Поскольку знаменатели равны, то равны и числители: $ad = bc$, что и требовалось доказать.

Вспоминаем то, что знаем

- Подберите какие-нибудь четыре числа, не равные нулю, так, чтобы произведение первых двух было равно произведению третьего с четвёртым.

Открываем новые знания

- Попробуйте составить пропорции из этих чисел.

?!

- Сколько пропорций можно составить? Как при переходе от одной пропорции к другой переставляются члены пропорции?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Свойства пропорции

Из основного свойства пропорции $ad = bc$ следует, что в каждой пропорции можно переставить: а) крайние члены; б) средние члены; в) крайние на место средних и наоборот, получив при этом новые пропорции.

Действительно, если $ad = bc$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ и т.д.

Таким образом можно составить 8 пропорций.
Например: есть пропорция: 1) $10 : 2 = 20 : 4$.
Поменяем местами *крайние члены* пропорции, получим: 2) $4 : 2 = 20 : 10$. Это *новая* пропорция.
Поменяем в первой пропорции *средние члены*, получим: 3) $10 : 20 = 2 : 4$. Это ещё одна *новая* пропорция.
Снова возьмём пропорцию $10 : 2 = 20 : 4$. Переставим в ней крайние члены на место средних и наоборот, получим *обратную* пропорцию: 4) $2 : 10 = 4 : 20$.
У нас уже четыре пропорции:
$10 : 2 = 20 : 4$; $4 : 2 = 20 : 10$; $10 : 20 = 2 : 4$; $2 : 10 = 4 : 20$.
Можно составить ещё четыре:
$20 : 10 = 4 : 2$; $20 : 4 = 10 : 2$; $4 : 20 = 2 : 10$; $2 : 4 = 10 : 20$.

Вспоминаем то, что знаем

- Найдите неизвестное число: $x \cdot 12 = 15 \cdot 16$.

Открываем новые знания

- Дана пропорция: $\frac{x}{30} = \frac{8}{5}$. Надо найти её неизвестный член. Применим основное свойство пропорции: $x \cdot 5 = 30 \cdot 8$. Продолжите решение и найдите x.

- Задана пропорция: $\frac{30}{x} = \frac{5}{8}$. Найдите x.

?!

- Как найти неизвестный член пропорции, если три остальные её члена известны?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Решение пропорций

Наиболее распространённая задача на пропорцию: найти неизвестный член пропорции, если остальные три её члена известны. Чаще всего это формулируют так: «Решить пропорцию».
Пример 1. Решить пропорцию: $\frac{x}{4} = \frac{7}{12}$.

Первый способ решения пропорции заключается в использовании её основного свойства: $x \cdot 12 = 4 \cdot 7$, откуда $x = \frac{4 \cdot 7}{12}$, т.е. $x = \frac{7}{3}$.

Второй способ решения данной пропорции – умножение обеих частей равенства на 4: $x = \frac{7}{12} \cdot 4$, т.е. $x = \frac{7}{3}$.

Если бы неизвестным был не первый член пропорции, а какой-то другой, то при решении пропорции вторым способом можно было бы переписать её в таком виде, что неизвестный член стал бы первым (используя свойства пропорций).

Пример 2. Решить пропорцию: $\frac{5}{6} = \frac{8}{x}$.

Поменяем местами 5 и x, получим пропорцию $\frac{x}{6} = \frac{8}{5}$. Умножим обе части равенства на 6:

$x = \frac{8}{5} \cdot 6$, т.е. $x = \frac{48}{5}$ или $x = 2{,}4$.

Развиваем умения

Н

1 Используя основное свойство пропорции, проверьте, являются ли пропорциями следующие равенства:

а) $5 : 1{,}5 = 10 : 3$;
в) $5 : 2\frac{2}{3} = 3 : 1\frac{3}{5}$;

б) $1 : 0{,}25 = 0{,}6 : 0{,}15$;
г) $0{,}1 : 0{,}01 = 0{,}2 : 0{,}02$.

2 Используя основное свойство пропорции, проверьте, можно ли составить пропорцию из данных чисел:

а) 5; 6; 10; 12;
в) 2; 6; 4; 12;
д) 6; 9; 8; 12;
б) 9; 1; 9; 81;
г) 12; 22; 30; 65;
е) 14; 21; 30; 45.

3 В следующих пропорциях переставьте числа так, чтобы снова получились пропорции:

а) $4 : 2 = 12 : 6$;
б) $\frac{1}{5} : \frac{1}{15} = \frac{1}{10} : \frac{1}{30}$;
в) $\frac{1}{2} : 4 = 5 : 40$.

4 Замените каждое равенство несколькими пропорциями:

а) $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$;
б) $24 \cdot 10 = 2 \cdot 120$;
в) $15 \cdot 6 = 9 \cdot 10$;
г) $42 \cdot 3 = 7 \cdot 18$.

5 Решите пропорцию:

а) $\frac{x}{15} = \frac{1}{3}$;
в) $\frac{0{,}7}{3{,}5} = \frac{x}{4{,}02}$;
д) $\frac{x}{12} = \frac{7}{10}$;
ж) $\frac{x}{16} = \frac{9}{32}$;

б) $\frac{16}{x} = \frac{4}{5}$;
г) $\frac{2{,}5}{0{,}38} = \frac{6{,}5}{x}$;
е) $\frac{12}{21} = \frac{x}{14}$;
з) $\frac{8}{7} = \frac{15}{x}$.

6 Решите пропорцию:

а) $x : \frac{1}{2} = 3 : 5$; б) $x : \frac{2}{3} = 3 : 4$; в) $x : 5 = 7 : \frac{1}{2}$; г) $x : 6 = \frac{1}{3} : 8$.

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Проверьте, является ли пропорцией следующее равенство: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{20}{8} = \frac{35}{14}$.

б) Решите пропорцию: $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$; $\frac{25}{x} = \frac{5}{7}$.

П **Вариант II.**

а) Проверьте, является ли пропорцией следующее равенство: $\frac{1}{7} : \frac{3}{4} = \frac{1}{14} : \frac{3}{8}$.

б) Решите пропорцию: $\frac{2x}{3} = \frac{4}{9}$; $\frac{2}{7} = \frac{3}{4x}$.

Тренировочные упражнения.

Н

7 Решите пропорцию:

а) $\frac{x}{6} = \frac{3}{9}$; б) $\frac{60}{x} = \frac{5}{7}$; в) $\frac{2{,}2}{3{,}5} = \frac{x}{3{,}85}$; г) $x : 2{,}43 = 2 : 5$.

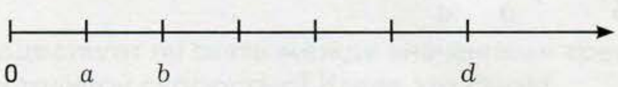
8 Найдите значение x из пропорции:

а) $\frac{3}{x+3} = \frac{7}{15}$; б) $\frac{x-5}{20} = \frac{6}{7}$; в) $\frac{2}{7} = \frac{3}{4x}$; г) $\frac{11}{17} = \frac{22}{68x}$.

П

9 Где на числовом луче должно быть изображено число x, чтобы была верна пропорция:

а) $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$; б) $\frac{d}{b} = \frac{x}{a}$; в) $\frac{a}{x} = \frac{b}{d}$; г) $\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$?



М

10 Даны тройки чисел: а) 4; 16; 32; б) 6; 18; 54.

Для каждой тройки чисел подберите четвёртое число так, чтобы из них можно было составить пропорцию. Сколько разных чисел можно подобрать для каждой тройки?

Н

11 Замените каждое равенство несколькими пропорциями:

а) $18 \cdot 3 = 9 \cdot 6$; б) $2{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \cdot 5$; в) $95 \cdot 6 = 19 \cdot 30$.

12 Проверьте, является ли пропорцией равенство:

а) $6 : 1{,}8 = 10 : 3$; б) $2 : \frac{1}{2} = 6 : \frac{1}{4}$; в) $10 : 0{,}5 = 20 : 0{,}1$.

13 Решите пропорцию:

а) $\frac{x}{5} = \frac{6}{10}$; б) $\frac{40}{x} = \frac{18}{9}$; в) $\frac{2{,}5}{3} = \frac{x}{6}$; г) $x : 1{,}4 = 3 : 7$.

П

14 Найдите значение x из пропорции:

а) $\frac{2}{x+2} = \frac{7}{28}$; в) $\frac{x-3}{30} = \frac{3}{10}$; д) $\frac{1}{8} = \frac{3}{2x}$; ж) $\frac{2}{12} = \frac{15}{9x}$;

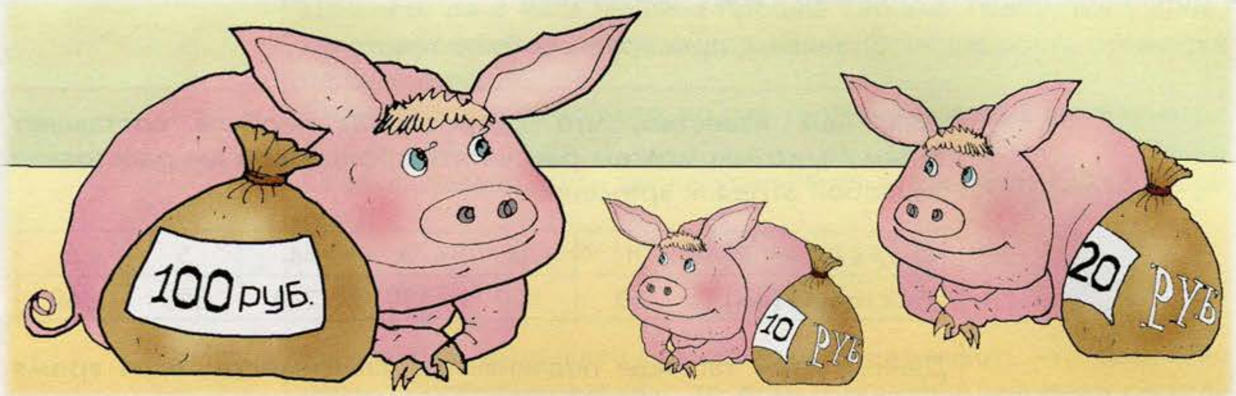
б) $\frac{2x}{3} = \frac{4}{9}$; г) $\frac{3x}{5} = \frac{9}{10}$; е) $\frac{8}{15} = \frac{6x}{9}$; з) $\frac{12}{13} = \frac{18x}{39}$.

М

15 При каком значении a получится пропорция:

а) $\frac{a}{16} = \frac{9}{a}$; б) $\frac{a}{a} = \frac{9}{16}$; в) $\frac{a}{a} = \frac{a}{16}$; г) $\frac{a}{a} = \frac{a}{a}$?

4.4 Прямая и обратная пропорциональные зависимости



Вспоминаем то, что знаем

- Скорость автомобиля – 60 км/ч. Заполните таблицу.

Время (ч)	$t_1 = 2$	$t_2 = 6$	$t_3 = 12$	$t_4 = 3$
Расстояние (км)	$S_1 = ?$	$S_2 = ?$	$S_3 = ?$	$S_4 = ?$

- Можно ли составить пропорцию из пар отношений: $t_1 : t_2$ и $S_1 : S_2$; $t_2 : t_3$ и $S_2 : S_3$; $t_3 : t_4$ и $S_3 : S_4$?

- Ширина прямоугольника равна 3 см. Заполните таблицу.

Длина (см)	$a_1 = 5$	$a_2 = 10$	$a_3 = 2$	$a_4 = 6$
Площадь (см^2)	$S_1 = ?$	$S_2 = ?$	$S_3 = ?$	$S_4 = ?$

- Можно ли составить пропорцию из пар отношений: $a_1 : a_2$ и $S_1 : S_2$; $a_2 : a_3$ и $S_2 : S_3$; $a_3 : a_4$ и $S_3 : S_4$?

Открываем новые знания

- Скорость поезда постоянна. От города A до города B он проехал 200 км, а от города B до города C – 600 км. Как сравнить время движения поезда на этих отрезках пути?
- Длины двух прямоугольников равны. Ширина одного из них – 12 дм, а другого – 4 дм. Сравните площади этих прямоугольников.

?!

- Существует ли связь между значениями времени и значениями пути при движении с постоянной скоростью? Какая это связь?

- Существует ли связь между значениями длины и значениями площади прямоугольника при неизменной ширине? Какая это связь?
- Можно ли записать эти связи в виде пропорции?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Если нам известно, что скорость автомобиля составляет 60 км/ч, то мы можем рассчитать пройденное им расстояние за любой отрезок времени:

Время (ч)	1	2	3	4	5	6
Расстояние (км)	60	120	180	240	300	360

Данные этой таблицы подчиняются зависимости: если время увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, то и расстояние увеличится (уменьшится) в это же число раз, то есть связь между значениями времени и значениями расстояния можно записать в виде *пропорции:* $\frac{2}{3} = \frac{120}{180}$; $\frac{3}{4} = \frac{180}{240}$ и т.д.

Если две величины связаны между собой так, что с **увеличением (уменьшением) одной** в несколько раз **вторая увеличивается (уменьшается)** во столько же раз, то такие величины называются **прямо пропорциональными**.

Если две величины прямо пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно отношению соответствующих значений второй величины, например: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_1}{S_2}$ при постоянной скорости; $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2}$ при постоянном времени.

Прямо пропорциональными величинами являются:
- количество товара и его стоимость при постоянной цене;
- длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине;
- объём параллелепипеда и площадь его основания при постоянной высоте;
- величина дроби и её числитель при постоянном знаменателе;
- объём выполненной работы и затраченное на неё время при постоянной производительности труда;
- производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени;
- длина пути, проходимого равномерно движущимся телом, и время его движения;
- скорость и длина пути при постоянном времени

и некоторые другие величины.

Решим задачу на движение, используя эту зависимость между величинами.

Пример. За 2 часа машина прошла 120 км. Требуется узнать, какое расстояние она пройдёт за 6 ч, если скорость останется неизменной.

Сначала узнаем, во сколько раз увеличится время движения: $6 : 2 = 3$ раза.

Следовательно, путь также увеличится в три раза: $120 \cdot 3 = 360$ (км).

Условие этой задачи можно записать так:

$$\downarrow \begin{array}{r} 120 \text{ км} - 2 \text{ ч} \\ x \text{ км} - 6 \text{ ч} \end{array} \downarrow$$

Одинаково направленные стрелки показывают, что величины прямо пропорциональны, то есть отношение значений расстояния $120 : x$ равно отношению соответствующих значений времени $2 : 6$.

Решение: составим пропорцию: $\dfrac{120}{x} = \dfrac{2}{6}$.

Теперь решим её: $x = \dfrac{120 \cdot 6}{2}$, т.е. $x = 120 \cdot 3$ (км); $x = 360$ км.

Часто вместо «прямо пропорциональные величины» говорят короче: «пропорциональные величины».

Вспоминаем то, что знаем

- Скорость автомобиля – 60 км/ч. Заполните таблицу.

Время (ч)	$t_1 = 2$	$t_2 = 6$	$t_3 = 12$	$t_4 = 3$
Расстояние (км)	$S_1 = ?$	$S_2 = ?$	$S_3 = ?$	$S_4 = ?$

- Рассмотрите частные: а) $\dfrac{S_1}{t_1}; \dfrac{S_2}{t_2}; \dfrac{S_3}{t_3}; \dfrac{S_4}{t_4}$; б) $\dfrac{t_1}{S_1}; \dfrac{t_2}{S_2}; \dfrac{t_3}{S_3}; \dfrac{t_4}{S_4}$.
- Что вы заметили?

Открываем новые знания

- Несколько рабочих проработали одно и то же время. Что можно сказать о частном двух величин: выполненной работы и производительности?

?!

- Что можно сказать о частном прямо пропорциональных величин?

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Если две величины прямо пропорциональны, то их частное — величина постоянная, и наоборот, если частное двух величин постоянно, то эти величины прямо пропорциональны.

Пример 1. Мы знаем, что скорость v и путь S при постоянном времени — прямо пропорциональные величины. Рассмотрим частное этих величин: $\frac{S}{v}$. По известной нам формуле $\frac{S}{v} = t$, а по условию t — величина постоянная.

Пример 2. Рассмотрим все возможные прямоугольники с одной и той же длиной a и убедимся, что у таких прямоугольников площадь S и ширина b — прямо пропорциональные величины. Возьмём отношение этих величин, а именно S к b.

Поскольку $\frac{S}{b} = a$, а длина a — величина постоянная, S и b — прямо пропорциональны.

Теперь ясно, почему при перечислении пар прямо пропорциональных величин обычно упоминается условие постоянства некоторой третьей величины. Проанализировав пары известных прямо пропорциональных величин, можно обнаружить третью величину (частное этих величин) и убедиться, что она постоянна.

Проведём рассуждение, доказывающее в общем виде утверждение о постоянности частного прямо пропорциональных величин.*

Предположим, что величины a и b — прямо пропорциональны. Возьмём конкретное значение a_1 величины a и соответствующее ей значение b_1 величины b. Если a_1 увеличить в k раз и получить $a_2 = k \cdot a_1$, то b_1 тоже увеличится в k раз и получится $b_2 = k \cdot b_1$.

Сравним между собой частные $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ и убедимся, что они равны.

Действительно: $\frac{a_2}{b_2} = \frac{k \cdot a_1}{k \cdot b_1} = \frac{a_1}{b_1}$.

И наоборот, предположим, что частное величин a и b постоянно, скажем, $\frac{a}{b} = m$. Рассмотрим a_1 и a_2 — два значения величины a; а также b_1 и b_2 — соответствующие им значения величины b.

* Приведённое ниже доказательство адресовано только желающим; оно не является обязательным для изучения.

Убедимся, что если $a_2 = k \cdot a_1$, то и $b_2 = k \cdot b_1$. Так как $\frac{a_1}{b_1} = m$ и $\frac{a_2}{b_2} = m$, то $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$.

Поменяем местами a_1 и b_2, получим $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$. Но поскольку $\frac{a_2}{a_1} = k$, то и $\frac{b_2}{b_1} = k$, или $b_2 = k \cdot b_1$, в чём и требовалось убедиться.

Можно утверждать следующее: **если величины a и b прямо пропорциональны, то они связаны между собой формулой $\frac{a}{b} = m$, или $a = m \cdot b$, где m — некоторая постоянная величина.**

Вспоминаем то, что знаем

- Расстояние между двумя городами – 600 км. Заполните таблицу.

Скорость (км/ч)	$v_1 = 50$	$v_2 = 100$	$v_3 = 150$
Время (ч)	$t_1 = ?$	$t_2 = ?$	$t_3 = ?$

- Верны ли равенства: $v_1 : v_2 = t_1 : t_2$; $v_1 : v_2 = t_2 : t_1$; $v_2 : v_3 = t_3 : t_2$?
- Надо изготовить 540 деталей. Заполните таблицу.

Производительность (дет. в день)	$v_1 = 20$	$v_2 = 60$	$v_3 = 90$
Время (дней)	$t_1 = ?$	$t_2 = ?$	$t_3 = ?$

- Составьте пропорции из пар отношений: $v_1 : v_2$; $t_1 : t_2$; $t_2 : t_1$; $v_2 : v_3$; $t_2 : t_3$; $t_3 : t_2$.

Открываем новые знания

- Известна длина пути. Первый путник прошёл этот путь со скоростью 20 км/день, а второй – со скоростью 40 км/день. Как сравнить время движения?
- Известен объём работы. Производительность труда мастера составляет 12 деталей в час, а его ученика – 4 детали в час. Как сравнить время работы мастера и его ученика?

?!

- Существует ли связь между значениями времени и значениями скорости равномерного движения при неизменном значении пройденного пути? Какая это связь?
- Существует ли связь между значениями производительности труда и значениями времени работы при неизменном значении объёма работы? Какая это связь?
- Можно ли записать эти связи в виде пропорции?

Обратно пропорциональные величины

Известно, что длина пути составляет 360 км. Зависимость скорости и времени движения на этом отрезке пути задана таблицей:

Время (ч)	3	4	9	12
Скорость (км/ч)	120	90	40	30

Данные таблицы подчиняются известной нам со времён начальной школы зависимости: если скорость движения *уменьшить (увеличить)* в некоторое число раз, то время движения *увеличится (уменьшится)* во столько же раз, то есть связь между значениями скорости и значениями времени можно записать в виде *пропорций:* $\frac{3}{4} = \frac{90}{120}$; $\frac{4}{9} = \frac{40}{90}$ и т.д.

Если две величины связаны между собой так, что с **увеличением (уменьшением) одной** в несколько раз **вторая уменьшается (увеличивается)** во столько же раз, то такие величины называются **обратно пропорциональными**.

Если две величины обратно пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно **обратному** отношению соответствующих значений второй величины, например: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$ при неизменном расстоянии.

Обратно пропорциональными величинами являются:
- количество товара и его цена при одинаковой стоимости покупки;
- скорость и время движения равномерно движущегося объекта при одинаковой длине пути;
- производительность труда и время работы при одинаковом объёме работы;
- число рабочих и время выполнения ими заданной работы при одинаковой производительности труда всех рабочих;
- величина дроби и её знаменатель при постоянном числителе

и некоторые другие величины.

Решим задачу на движение, используя эту зависимость между величинами.

Пример 1. Машина затратила 2 часа на движение по некоторому участку пути со скоростью 50 км/ч. Требуется узнать, за какое время она пройдёт этот же участок пути, если её скорость будет 100 км/ч.

Сначала узнаем, во сколько раз увеличится скорость движения: $100 : 50 = 2$ раза. Следовательно, время движения *уменьшится* в 2 раза и станет равным $2 : 2 = 1$ ч.

Условие этой же задачи можно записать так:

$$\begin{array}{l} \downarrow\ 50\ \text{км/ч} - 2\ \text{ч}\ \uparrow \\ \ \ 100\ \text{км/ч} - x\ \text{ч} \end{array}$$

Противоположно направленные стрелки показывают, что величины обратно пропорциональны, то есть отношение значений скорости $50 : 100$ равно *обратному* отношению соответствующих значений времени $x : 2$.

Решение: составим пропорцию: $\frac{50}{100} = \frac{x}{2}$. Найдём неизвестный член пропорции: $x = \frac{50 \cdot 2}{100}$, т.е. $x = 100 : 100$ (ч); $x = 1$ ч.

Вспоминаем то, что знаем

- Расстояние между двумя городами – 600 км. Заполните таблицу.

Скорость (км/ч)	$v_1 = 50$	$v_2 = 100$	$v_3 = 150$
Время (ч)	$t_1 = ?$	$t_2 = ?$	$t_3 = ?$

- Рассмотрите произведения: v_1t_1; v_2t_2; v_3t_3.
- Что вы заметили?

Открываем новые знания

- Несколько рабочих выполняли одинаковые задания. Что можно сказать о произведении двух величин: времени работы и производительности?

?!

- Что можно сказать о произведении обратно пропорциональных величин?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Если две величины обратно пропорциональны, то их произведение есть величина постоянная, и наоборот, если произведение двух величин постоянно, то эти величины обратно пропорциональны.

Пример 1. Мы знаем, что скорость v и время движения t при постоянном пути S – обратно пропорциональные величины. Рассмотрим произведение этих величин: vt. По известной нам формуле $vt = S$, а по условию S – величина постоянная.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Пример 2. Рассмотрим все возможные прямоугольные треугольники с одной и той же площадью S и убедимся, что длины их катетов a и b – обратно пропорциональные величины. Вспомним формулу площади прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$; отсюда $ab = 2S$, то есть произведение катетов есть величина постоянная, значит, они обратно пропорциональны.

Теперь ясно, почему при перечислении пар обратно пропорциональных величин обычно упоминается условие постоянства некоторой третьей величины. Проанализировав пары обратно пропорциональных величин, всегда можно обнаружить третью величину (произведение этих величин) и убедиться, что она постоянна.

Проведём рассуждение, доказывающее в общем виде утверждение о постоянности произведения обратно пропорциональных величин.*

Предположим, что величины a и b – обратно пропорциональны.

Возьмём конкретное значение a_1 величины a и соответствующее ей значение b_1 величины b. Если a_1 увеличить в k раз и получить $a_2 = k \cdot a_1$, то b_1 уменьшится в k раз и получится $b_2 = \frac{b_1}{k}$.

Убедимся, что произведения $a_1 \cdot b_1$ и $a_2 \cdot b_2$ равны.

Действительно, $a_2 \cdot b_2 = k \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{k} = \frac{k \cdot a_1 \cdot b_1}{k} = a_1 \cdot b_1$.

И наоборот, предположим, что произведение величин a и b постоянно, скажем, $a \cdot b = n$. Рассмотрим a_1 и a_2 – два значения величины a, а также b_1 и b_2 – соответствующие им значения величины b.

Убедимся, что если $a_2 = k \cdot a_1$, то $b_2 = \frac{b_1}{k}$. Так как $a_1 \cdot b_1 = n$ и $a_2 \cdot b_2 = n$, то $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$, откуда $b_2 = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{k \cdot a_1} = \frac{b_1}{k}$, в чём и требовалось убедиться.

Можно утверждать следующее: **если величины a и b – обратно пропорциональны, то они связаны между собой формулой $a \cdot b = n$ или $a = \frac{n}{b}$, где n – некоторая постоянная величина.**

* Приведённое ниже доказательство адресовано только желающим; оно не является обязательным для изучения.

Вспоминаем то, что знаем

- Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её:

Сторона квадрата (см)			
Площадь квадрата (см^2)			

- Верно ли, что при увеличении стороны квадрата его площадь тоже увеличивается?
- Если сторону квадрата увеличить в два раза, то во сколько раз увеличится его площадь?
- Являются ли сторона квадрата и его площадь прямо пропорциональными величинами?
- Являются ли прямо пропорциональными величинами периметр прямоугольника и его длина при постоянной ширине?

Открываем новые знания

- В самосвал грузят одинаковые бетонные блоки. Являются ли прямо пропорциональными величинами количество загруженных блоков и масса самосвала с блоками?
- Являются ли обратно пропорциональными длина и ширина прямоугольника при постоянном периметре?

?!

- Две величины связаны друг с другом таким образом, что с увеличением одной величины увеличивается и вторая. Можно ли утверждать, что эти величины прямо пропорциональны?
- Две величины связаны друг с другом таким образом, что с увеличением одной величины вторая уменьшается. Можно ли утверждать, что эти величины обратно пропорциональны?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Обратите внимание: если одна величина увеличивается, когда увеличивается другая, то это не обязательно означает, что они прямо пропорциональны. Нужно ещё, чтобы увеличение обеих величин происходило *в одинаковое число раз.*

Например, вам известно, что с увеличением одного из слагаемых увеличивается и сумма, однако было бы ошибочно считать, что сумма прямо пропорциональна этому слагаемому, так как они увеличиваются не *в одинаковое число раз.*

Н

1 а) Если одну из двух прямо пропорциональных величин уменьшить в несколько раз, то как изменится вторая величина?

б) Если одну из двух обратно пропорциональных величин уменьшить в несколько раз, то как изменится вторая величина?

2 Выберите из перечисленных пар величин прямо пропорциональные величины. Обоснуйте свой ответ. Какие из перечисленных пар величин являются обратно пропорциональными? Какие – не являются пропорциональными?

а) Количество товара и стоимость покупки при постоянной цене.
б) Скорость движения и время при постоянном расстоянии.
в) Производительность труда и время при постоянном объёме работы.
г) Скорость движения и путь при постоянном времени.
д) Длина и ширина прямоугольника данной площади.
е) Длина стороны квадрата и его площадь.
ж) Длина стороны квадрата и его периметр.
з) Объём куба и длина его ребра.
и) Масса воды и её объём.

3 Расскажите, как составили пропорцию к задаче, используя таблицу.
За 4 пакета молока заплатили 144 р. Сколько таких пакетов можно купить на 288 р.?

Цена	Количество	Стоимость
Одинаковая	4 п.	144 р.
	? п.	288 р.

а) $\frac{4}{x}=\frac{144}{288}$; б) $\frac{x}{4}=\frac{288}{144}$; в) $\frac{144}{4}=\frac{288}{x}$; г) $\frac{4}{144}=\frac{x}{288}$.

4 Расскажите, как составили пропорцию к задаче, используя таблицу.
Автомобиль проехал некоторое расстояние между городами за 4 ч, двигаясь со скоростью 50 км/ч. На обратном пути он проехал это же расстояние за 5 ч. С какой скоростью двигался автомобиль на обратном пути?

Расстояние	Время	Скорость
Одинаковое	4 ч.	50 км/ч
	5 ч.	? км/ч

а) $\frac{4}{5}=\frac{x}{50}$; б) $\frac{5}{4}=\frac{50}{x}$.

Можно ли составить к этой задаче такое равенство: $50 \cdot 4 = x \cdot 5$?

5 Какая пропорция составлена по условию задачи: «Пассажирский поезд, который двигался со скоростью 65 км/ч, затратил на путь между станциями 4 ч. За сколько часов пройдёт этот же путь товарный поезд, если его скорость 40 км/ч?»:

а) $\frac{65}{40} = \frac{4}{x}$; б) $\frac{40}{65} = \frac{x}{4}$; в) $\frac{40}{65} = \frac{4}{x}$; г) $\frac{4}{65} = \frac{x}{40}$.

6 Для каждой задачи определите, прямо пропорциональны или обратно пропорциональны величины, о которых идёт речь. Составьте пропорции и решите задачи.

а) В упаковке – 6 стаканчиков сметаны. Масса сметаны в такой упаковке составляет 2 кг 100 г. Найдите массу 5 таких стаканчиков сметаны.

б) Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песка. Сколько килограммов ягод нужно на 10 кг сахарного песка?

в) Четыре маляра могли бы покрасить забор за 3 дня. За сколько дней тот же забор покрасят 6 маляров, если у всех маляров одинаковая производительность труда?

г) Две шестерёнки сцеплены зубьями. Первая, имеющая 60 зубьев, за минуту делает 50 оборотов. Сколько оборотов за минуту делает вторая – с 40 зубьями?

д) Двенадцать тракторов вспахали поле за 88 ч. Сколько понадобилось бы таких же тракторов, чтобы вспахать это поле за 33 ч?

7 За одно и то же время токарь делает 6 деталей, а его ученик – 4 такие же детали.

а) Сколько деталей сделает ученик токаря за то же время, за которое токарь сделает 27 деталей?

б) Сколько времени потратит ученик токаря на задание, которое токарь выполняет за 1 ч?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

Составьте пропорцию и решите задачу.

а) В 100 г раствора содержится 4 г соли. Сколько граммов соли в 250 г этого раствора?

б) Автомобилист проехал тоннель за 1 мин, двигаясь со скоростью 60 км/ч. За какое время он проехал бы этот тоннель, двигаясь со скоростью 50 км/ч?

П **Вариант II.**

Составьте пропорцию и решите задачу.

а) Для окраски 15 $м^2$ пола израсходовали 1,5 кг эмали. Сколько килограммов эмали потребуется для покраски пола в комнате размером 5×6 м?

б) Шесть маляров выполнят работу за 5 дней. Сколько ещё маляров надо пригласить, чтобы выполнить эту же работу за 3 дня?

Тренировочные упражнения.

Н

8 Пешеход прошёл 6 км, а велосипедист проехал 18 км за одинаковое время.

а) Сколько километров проехал велосипедист за то время, за которое пешеход прошёл 10 км?

б) Сколько времени потратил велосипедист на тот путь, который пешеход прошёл за 2 ч?

9 Составьте пропорции к задаче, используя таблицу.

От города A до города B автомобиль двигался 4 ч, а от города B до города C – 6 ч. Известно, что второй отрезок пути на 130 км больше первого. Чему равно расстояние от города A до города B и от города B до города C (скорость движения автомобиля была постоянной)?

Скорость	Время	Расстояние
Одинаковая	4 ч.	? км
	6 ч.	? км
	(6–4) ч.	130 км

10 а) На автозаправочной станции первый водитель залил в бак 40 л бензина, второй – 60 л такого же бензина. Первый заплатил на 540 р. меньше, чем второй. Сколько заплатил за бензин каждый водитель?

б) Турист прошёл сначала 12 км, а потом ещё 18 км, двигаясь с одной и той же скоростью. Какое время он затратил на каждый участок пути, если на движение по второму участку ему понадобилось времени на час больше?

П

11 Вася, прочитав в старом дедушкином учебнике, что две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз вторая увеличивается во столько же раз, остался недовольным. «А почему там не сказано, что при уменьшении одной величины в несколько раз вторая тоже уменьшается во столько же раз?» – возмутился он. Что бы вы ответили на замечание Васи?

М

12 Валя заинтересовался, могут ли две величины быть связаны так, что при увеличении одной из них **на** некоторое число значение второй увеличивается **на** такое же число. Можете ли вы помочь Вале привести примеры таких величин?

Н

13 а) Некоторое расстояние первый поезд прошёл за 3 ч со скоростью 80 км/ч. За сколько часов второй поезд пройдёт то же расстояние со скоростью 60 км/ч?

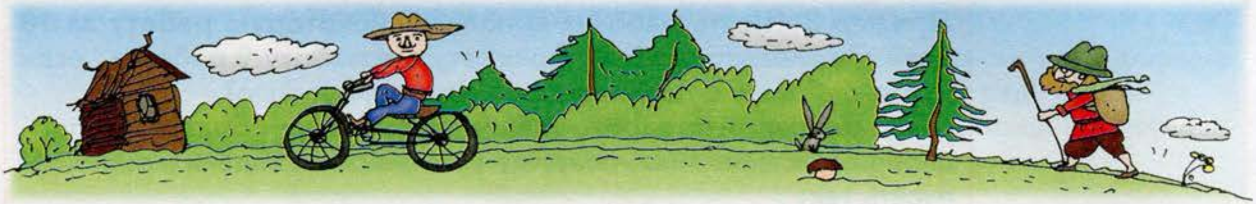
б) Восемь метров сукна стоят столько же, сколько стоят 63 м ситца. Сколько метров ситца можно купить вместо 14 м сукна?

в) Один килограмм металлолома заменяет 2,5 кг железной руды. Сколько руды заменяют 4 т металлолома?

г) Для приготовления каши на один стакан молока требуется 2 столовые ложки крупы. Сколько нужно взять стаканов молока, чтобы приготовить кашу из 6 ложек крупы?

П

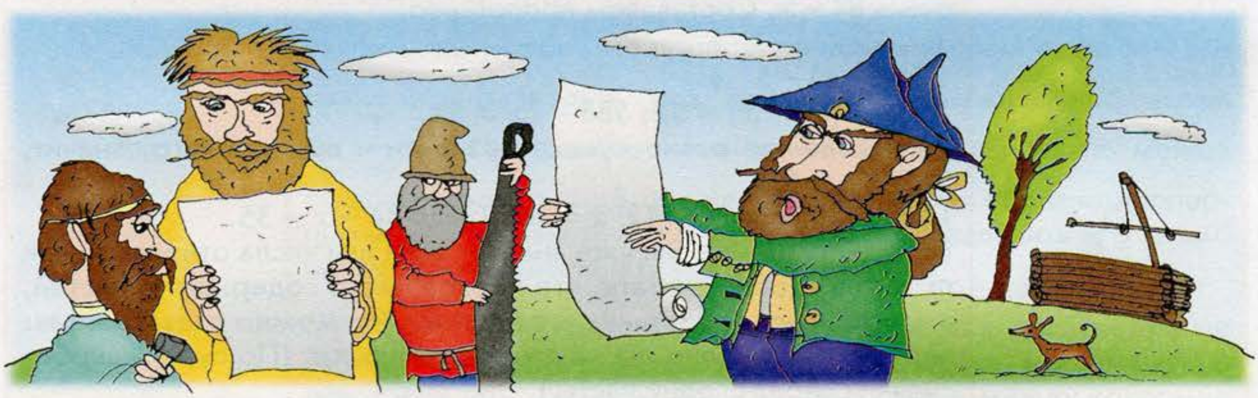
14 Велосипедист движется со скоростью на 10 км/ч большей, чем пешеход. На один и тот же путь велосипедисту требуется 2 ч, а пешеходу – 7 ч. Найдите скорости велосипедиста и пешехода.



М

15 Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Некий господин позвал плотника и велел двор построить. Дал ему двадцать человек работников и спросил, в сколько дней построят они его двор. Плотник ответил: в тридцать дней. А господину надобно в пять дней построить, и ради того спросил он плотника: сколько человек тебе надо иметь, дабы с ними ты построил двор в 5 дней; и плотник, недоумевая, спрашивает тебя, арифметик: сколько человек ему надо иметь, чтобы построить тот двор в 5 дней?

4.5 Решение задач на пропорции



Открываем новые знания

Пропорциональные величины часто встречаются в жизни. Один из способов решения задач, где они присутствуют, заключается в том, что неизвестное значение одной из величин принимают за x и составляют уравнение.

Пример 1. За 1,5 кг гречневой крупы заплатили 30 р. Сколько придётся заплатить за 20 кг такой же крупы?

Масса и стоимость товара – прямо пропорциональные величины, поэтому условие этой задачи можно записать так:

$$\left\downarrow\begin{array}{l} 1{,}5 \text{ кг} - 30 \text{ р.} \\ 20 \text{ кг} - x \text{ р.} \end{array}\right\downarrow$$

Решение. Составим пропорцию: $\frac{1{,}5}{20} = \frac{30}{x}$.

Найдём неизвестный член пропорции: $x = \frac{20 \cdot 30}{1{,}5}$, т.е. $x = 400$ р.

Пример 2. Шесть рабочих выполнили некоторую работу за 18 дней. За сколько дней выполнят эту же работу 9 рабочих, если будут работать с такой же производительностью?

Число рабочих и продолжительность работы – обратно пропорциональные величины, поэтому условие этой задачи можно записать так:

$$\left\downarrow\begin{array}{l} 6 \text{ р.} - 18 \text{ дн.} \\ 9 \text{ р.} - x \text{ дн.} \end{array}\right\uparrow$$

Решение. Составим пропорцию: $\frac{6}{9} = \frac{x}{18}$.

Найдём неизвестный член пропорции: $x = \frac{6 \cdot 18}{9}$, т.е. $x = 12$ (дн.).

Рассмотрим с новой точки зрения задачу на деление числа в данном отношении. Теперь мы можем сказать так: **разделить число в отношении $m : n$ значит разделить его на две части, прямо пропорциональные числам m и n.**

Пример 3. Разделить число 84 в отношении 7 : 5.

Первое решение. Пусть первая часть равна x, тогда вторая часть равна $84 - x$. Составляем пропорцию.

$$\left\downarrow\begin{array}{l} \quad x \quad - 7 \\ (84 - x) - 5 \end{array}\right\downarrow$$

Тогда $7\,(84 - x) = 5x$; $588 - 7x = 5x$.

Уменьшаемое равно сумме разности и вычитаемого, значит, $5x + 7x = 588$.

$12x = 588$; $x = 588 : 12$; $x = 49$. Тогда $84 - x = 35$.

Второе решение. Вы уже знаете: если два числа относятся, как $m : n$, то удобно считать, что первое число содержит m частей, а второе число – n таких же частей. Это можно сказать и так: первое число равно mx, а второе равно nx. (По сути, мы обозначили через x одну часть.)

При решении нашей задачи обозначим первую часть $7x$, а вторую $5x$. Тогда $7x + 5x = 84$, отсюда $12x = 84$; $x = 7$, следовательно, $7x = 49$; $5x = 35$.

Второе решение может быть распространено на несколько чисел.

Пример 4. Разделить число 84 в отношении 7 : 5 : 2.

Первое решение. Прежде всего следует узнать, какое число приходится на одну часть.

Общее количество частей равно $7 + 5 + 2 = 14$, поэтому на одну часть приходится $\frac{84}{14} = 6$. Последовательно умножив 6 на 7, 5, 2, получим соответственно 42, 30, 12. Очевидно, что $\frac{84}{14} = \frac{42}{7} = \frac{30}{5} = \frac{12}{2}$. То есть число 84 разделили на три части x, y, z так, что первая часть относится к числу 7 так, как вторая к числу 5, а третья к числу 2: $\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$.

Таким образом, деление в заданном отношении – это деление на части *прямо пропорционально* заданному ряду чисел.

Второе решение. Решим эту задачу при помощи пропорции. Обозначим искомые части числа 84 через x, y, z.

Составим пропорции: $\frac{84}{14} = \frac{x}{7}$; $\frac{84}{14} = \frac{y}{5}$; $\frac{84}{14} = \frac{z}{2}$.

Отсюда $x = \frac{84}{14} \cdot 7$; $y = \frac{84}{14} \cdot 5$; $z = \frac{84}{14} \cdot 2$.

Внимание! (Тем, кто предпочитает решать учебные задачи с помощью готовых правил, не проводя каждый раз рассуждения.) **Чтобы разделить число на части пропорционально заданным числам, надо разделить его на сумму этих чисел и частное последовательно умножить на каждое из этих чисел.**

В некоторых задачах возникает необходимость разбить число на несколько частей не *прямо пропорционально* заданным числам, а *обратно пропорционально*.

Разбить число обратно пропорционально числам n, m, k – всё равно что разделить его прямо пропорционально числам $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{m}$; $\frac{1}{k}$. При разбиении числа на *две* части правило можно сформулировать ещё проще: разбить число обратно пропорционально числам n и m – всё равно что разделить его прямо пропорционально m и n.

Пример 5. Первый велосипедист движется со скоростью 10 км/ч, второй – 9 км/ч. Они отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 95 км. Какой путь проехал до встречи каждый из них?

Решение. Поскольку велосипедисты были в пути одно и то же время, а при постоянном времени расстояние прямо пропорционально скорости, то разделим 95 км в отношении 10 : 9.

Первый велосипедист проехал: $95 : (10 + 9) \cdot 10 = 95 : 19 \cdot 10 =$ $= 50$ км.

Второй велосипедист проехал: $95 : (10 + 9) \cdot 9 = 95 : 19 \cdot 9 =$ $= 45$ км.

Пример 6. Первая машинистка печатает 10 страниц в час, вторая – 9 страниц в час. Как разделить между ними рукопись в 95 страниц, чтобы они закончили работу одновременно?

Решение. Поскольку объём работы прямо пропорционален производительности (при одинаковом времени), то заданный объём работы (95 страниц) нужно разделить *прямо пропорционально* производительностям машинисток, то есть в отношении $10 : 9$.

Первая машинистка должна получить: $95 : (10 + 9) \cdot 10 = 95 : 19 \cdot 10 = 50$ страниц.

Вторая машинистка должна получить: $95 : (10 + 9) \cdot 9 = 95 : 19 \cdot 9 = 45$ страниц.

Пример 7. Два велосипедиста отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 27 км. Какой путь проехал до встречи каждый из велосипедистов, если известно, что первый велосипедист проезжает за 4 ч такое же расстояние, какое второй проезжает за 5 ч?

Решение. Мы уже знаем из примера 5, что расстояние – 27 км нужно разделить прямо пропорционально скоростям велосипедистов. Но скорости велосипедистов нам не известны! Зато мы знаем, что при данном расстоянии скорость обратно пропорциональна времени. Таким образом, 27 км нужно разделить *обратно пропорционально* числам 4 и 5, то есть прямо пропорционально числам 5 и 4.

$27 : (4 + 5) \cdot 5 = 15$ км проехал до встречи первый велосипедист;
$27 : (4 + 5) \cdot 4 = 12$ км проехал до встречи второй велосипедист.

Пример 8. Первая машинистка перепечатывает рукопись в 420 страниц за 3 дня, а вторая – за 4 дня. Сколько страниц рукописи нужно дать каждой машинистке, чтобы они закончили работу одновременно?

Решение. Мы уже знаем из примера 6, что рукопись нужно разделить прямо пропорционально производительностям машинисток. Но производительность обратно пропорциональна времени. Таким образом, 420 страниц нужно разделить между первой и второй машинистками *обратно пропорционально* числам 3 и 4, то есть прямо пропорционально числам 4 и 3.

$420 : (3 + 4) \cdot 4 = 240$ страниц следует отдать первой машинистке;
$420 : (3 + 4) \cdot 3 = 180$ страниц следует отдать второй машинистке.

Пример 9. Одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми 14 км, друг за другом отправились пешеход и велосипедист. Скорость пешехода равна 5 км/ч, а скорость велосипедиста 12 км/ч. На каком расстоянии от пункта B велосипедист догонит пешехода?

Решение. Раньше вы решали такие задачи, находя скорость сближения: $12 - 5 = 7$ (км/ч). Таким образом, велосипедист догонит пешехода через $14 : 7 = 2$ (ч) после старта. Пешеход за это время пройдёт $5 \cdot 2 = 10$ (км).

Рассмотрим теперь решение с помощью пропорции. Пусть велосипедист догнал пешехода на расстоянии x км от точки B.

Поскольку при данном времени расстояние прямо пропорционально скорости, то запишем это так:

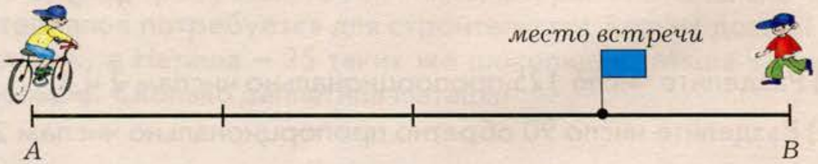
$$\begin{array}{ll} \downarrow (14 + x) \text{ км} & - 12 \text{ км/ч} \downarrow \\ \quad x \text{ км} & - 5 \text{ км/ч} \end{array}$$

Отсюда $12x = 5\,(14 + x)$; $12x = 70 + 5x$.

Слагаемое 70 равно разности суммы $12x$ и слагаемого $5x$: $12x - 5x = 70$; $7x = 70$; $x = 10$.

Пример 10. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, одновременно с ним из пункта B в пункт A направился пешеход, причём скорость пешехода в 3 раза меньше скорости велосипедиста. За какое время прошёл расстояние от A до B пешеход, если известно, что он встретил велосипедиста через 1,5 ч после начала движения?

Решение. Расстояния, преодолённые велосипедистом и пешеходом от начала движения до встречи, прямо пропорциональны их скоростям. Значит, велосипедист проехал до встречи с пешеходом в 3 раза большее расстояние, чем прошёл пешеход. А это, в свою очередь, означает, что пешеходу после встречи с велосипедистом осталось пройти расстояние в 3 раза большее, чем он прошёл до встречи, а поскольку при постоянной скорости время прямо пропорционально расстоянию, то это займёт у него $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ (ч). Таким образом, от B до A пешеход шёл $1{,}5 + 4{,}5 = 6$ (ч).



В заключительной стадии решения можно было рассуждать и по-другому: из рисунка видно (и это вытекает из пропорциональности величин), что расстояние от B до A в 4 раза больше, чем расстояние от B до места встречи, а значит, и время движения тоже в 4 раза больше, то есть составляет $1{,}5 \cdot 4 = 6$ (ч).

Н

1 Прочитайте задачу, определите, прямо пропорциональны или обратно пропорциональны величины, о которых идёт речь, составьте пропорцию и решите задачу.

а) В четырёх коробках 48 карандашей. Найдите число карандашей в 30 таких коробках.

б) Расстояние между городами A и B автомобиль проехал за 4 ч, двигаясь со средней скоростью 65 км/ч. За сколько часов проедет это же расстояние автобус, средняя скорость которого составляет 40 км/ч?

в) Есть два прямоугольника равной площади. Длина первого – 15 см, ширина – 6 см. Чему равна ширина второго прямоугольника, если его длина 20 см?

г) Для окраски 15 м^2 забора потребовалось 1,5 кг краски. Сколько нужно краски, чтобы покрасить забор площадью 18 м^2?

д) Туристы планировали пройти маршрут за 6 дней, но вместо 52 км они проходили в день 39 км. За сколько дней был пройден туристами этот маршрут?

е) Бригада из 4 человек выполнила задание за 10 дней. За сколько дней выполнит такое же задание другая бригада – из 5 человек, если все члены обеих бригад работают с одинаковой производительностью?

2 Разделите число:

а) 12 в отношении 1 : 3;

б) 15 в отношении 2 : 3;

в) 48 в отношении 3 : 5;

г) 100 в отношении $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;

д) 96 в отношении $\frac{1}{3} : \frac{3}{5}$;

е) 90 в отношении $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.

3 а) Разделите число 125 пропорционально числам 2 и 3.

б) Разделите число 90 обратно пропорционально числам 2 и 3.

в) Из «Арифметики» А.П. Киселёва. Три купца составили товарищество для ведения некоторого торгового дела. Первый купец внёс для этой цели 15 000 р., второй – 10 000 р., третий – 12 500 р. По окончании торгового дела они получили общей прибыли 7 500 р. Спрашивается: сколько из этой прибыли придётся получить каждому купцу?

г) Старинная задача. Чтобы приготовить стекло, берут 10 частей поташу, 31 часть песку и 2 части мелу. Сколько нужно этих материалов на 86 пудов стекла?

4 а) Скорость автомобиля в 2 раза больше скорости автобуса. Они одновременно направились навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми равно 240 км. Сколько километров проехал каждый из них до встречи?

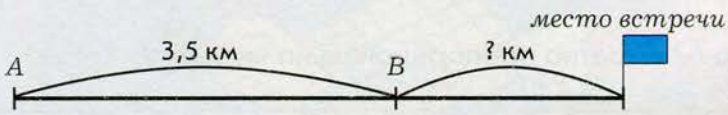
б) Расстояние между двумя посёлками равно 60 км. Из этих посёлков одновременно выехали навстречу друг другу тракторист и велосипедист. Сколько километров проехал каждый из них до встречи, если велосипедист проехал расстояние между посёлками за 6 ч, а тракторист – за 2 ч? (Решите задачу двумя способами.)

в) Канаву длиной 18 м первый землекоп прорывает за 3 ч, а второй – за 6 ч. Они прорыли эту канаву, начав рыть с разных её концов одновременно. Сколько метров канавы прорыл каждый землекоп?

г) Над выполнением задания 3 дня работала первая бригада из 5 плотников и 4 дня вторая бригада из 6 плотников. За работу им заплатили 3 900 р. Какую сумму получит вторая бригада, если все плотники работали с одинаковой производительностью?

5 а) Легковой автомобиль проезжает путь между городами A и B за 3 ч. Когда автомобиль выехал из города A в город B, одновременно с ним из города B в город A выехал грузовик. Через 2 ч они встретились. Сколько времени осталось ехать грузовику до прибытия в город A?

б) Одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 3,5 км, друг за другом отправились два пешехода. Скорость одного пешехода равна 5 км/ч, а скорость второго – 6 км/ч. На каком расстоянии от пункта B второй пешеход догонит первого? (Решите задачу двумя способами.)



Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Для строительства двух домов требуется 150 $м^3$ пиломатериалов. Сколько кубических метров пиломатериалов потребуется для строительства 5 таких домов?

б) Маша купила 40 шоколадок, а Наташа – 25 таких же шоколадок. Маша заплатила за покупку на 105 р. больше. Сколько заплатила Наташа?

П **Вариант II.**

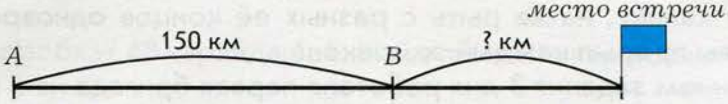
а) Автомобилист планировал проехать расстояние между двумя городами за 3 ч, но из-за плохой погоды его средняя скорость была ниже, чем он предполагал: вместо запланированных 70 км/ч он двигался со скоростью 56 км/ч. За сколько часов он проехал свой маршрут?

б) Длина Волги в реальности равна приблизительно 3 530 км, а на карте её длина составляет 17,7 см. Каково реальное расстояние между городами, если на этой же карте оно составляет 8,75 см?

Тренировочные упражнения.

Н

6 а) Одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми 150 км, в одном направлении отправились два автомобиля. Скорость первого равна 70 км/ч, а скорость второго – 40 км/ч. На каком расстоянии от пункта B первый автомобиль догонит второй?



б) Маше и Кате поручили раскрасить звёзды на декорации к школьному спектаклю. Маша раскрашивает 2 звезды за минуту, а Катя – 3 звезды за минуту. На декорации 60 звёзд. Как им поделить работу так, чтобы закончить её одновременно?

в) Реальное расстояние между городами составляет 250 км. На карте это же расстояние изображается отрезком длиной 5 см. Какую длину на этой карте будет иметь отрезок, изображающий расстояние в 150 км?

П

7 Две бригады вместе выполнили работу за 5 дней. За сколько дней выполнила бы эту работу вторая бригада, если первая выполняет её за 15 дней?

М

8 Разделите число 62 обратно пропорционально числам 2; 3; 5.

Н

9 а) Первая машинистка перепечатывает 90 страниц за 10 часов, а вторая – за 15 часов. Как распределить между ними 90 страниц, чтобы они были перепечатаны в кратчайший срок?

б) Два брата сложили свои деньги для покупки акций. Старший брат внёс 500 р., а младший – 300 р. Через некоторое время они продали акции за 1 000 р. Как им справедливо разделить полученные деньги?

в) Шесть маляров, работающих с одинаковой производительностью, выполнят работу за 5 дней. Сколько ещё маляров, работающих с такой же производительностью, надо пригласить, чтобы выполнить эту работу за 3 дня?

П

10 а) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста в 4 раза меньше скорости мотоциклиста. Через сколько минут велосипедист встретится с мотоциклистом, если на путь от A до B мотоциклисту требуется 20 мин?

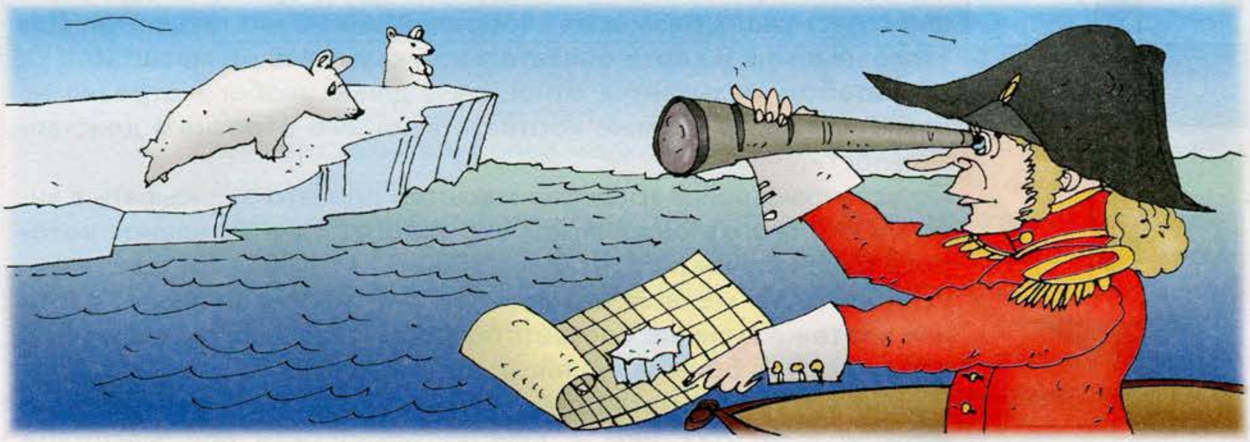
б) Два насоса, работая одновременно, осушают котлован за 1 ч. За сколько часов осушит котлован второй насос, работая один, если первому насосу на это понадобилось 3 ч?

М

11 а) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, одновременно с ним из пункта B в пункт A направился пешеход, причём скорость пешехода была в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Во сколько раз дольше шёл от места встречи до пункта A пешеход, чем ехал от места встречи до пункта B велосипедист?

б) Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля, причём известно, что первый прибыл в конечный пункт через 9 ч после встречи, а второй – через 16 ч после встречи. Найдите отношение скоростей автомобилей.

4.6 Масштаб



Вспоминаем то, что знаем

Что общего у приведённых фрагментов карт и чем они отличаются?

а)

б)

Открываем новые знания

- Какую из данных карт можно назвать более крупномасштабной? Почему?

____

?!

- Как реальное расстояние изобразить на карте? Как записать произведённые действия так, чтобы читающий карту понял, каково это реальное расстояние?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

С древних времён путешественникам помогают планы и карты, на которых в уменьшенном виде изображены части земной поверхности. При этом планы и карты должны давать представление о настоящих размерах изображённых на них объектов. Для этого на плане и карте обязательно указывают её **масштаб**.

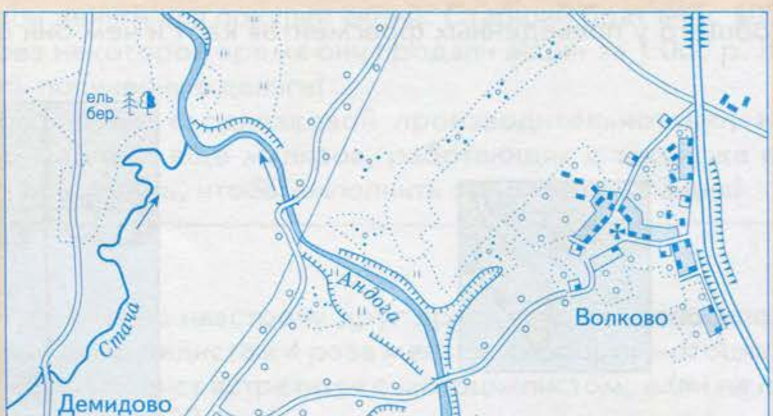
Масштабом называется отношение длины любого отрезка на плане или карте к длине соответствующего отрезка в действительности.

По установившейся традиции масштаб принято записывать в виде не любого отношения, а лишь такого, один из членов которого равен единице: 1 : 100; 1 : 5 000; 2 : 1; 1 000 : 1 и т.д.

Если масштаб меньше единицы, то расстояния на плане, карте или чертеже меньше соответствующих реальных расстояний, а если масштаб больше единицы, то больше.

Например, при масштабе чертежа 1 : 10 расстояние на чертеже меньше в 10 раз, чем в действительности, а при масштабе 10 : 1 – больше в 10 раз, чем в действительности.

Масштаб географической карты показывает, какую часть от реальных расстояний составляют расстояния на карте.



Например, масштаб карты на предыдущей странице 1 : 200 000 $\left(\frac{1}{200\ 000}\right)$; это означает, что 1 см на карте соответствует 200 000 см (или же 2 км) на местности. Иногда вместо указания масштаба так и говорят: «В 1 см – 2 км».

Здесь приведены две карты одной и той же местности. Левую из них принято называть более мелкомасштабной, а правую – более крупномасштабной.

Чем мелкомасштабнее карта, тем изображения объектов на ней более мелкие (т.е. меньше по размеру). Сравните, например, размеры озера Пирос на приведённых картах – на левой размеры озера мельче, а на правой – крупнее.

Можно сказать и так: из двух карт более мелкомасштабной является та, масштаб которой меньше. Например, если сравниваются карты с масштабами 1 : 500 000 и 1 : 200 000, то первая из них более мелкомасштабная, так как

$$\frac{1}{500000} < \frac{1}{200000}.$$

Развиваем умения

Н

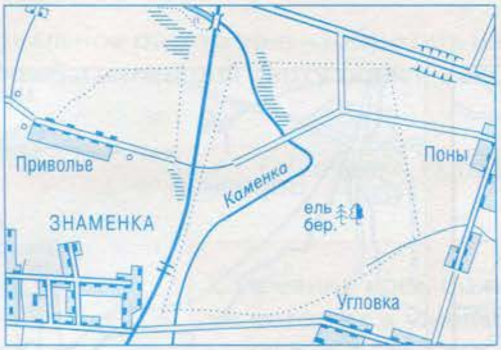
1 Являются ли следующие величины прямо пропорциональными или обратно пропорциональными или ни теми ни другими:

а) соответственные расстояния на карте и в действительности;

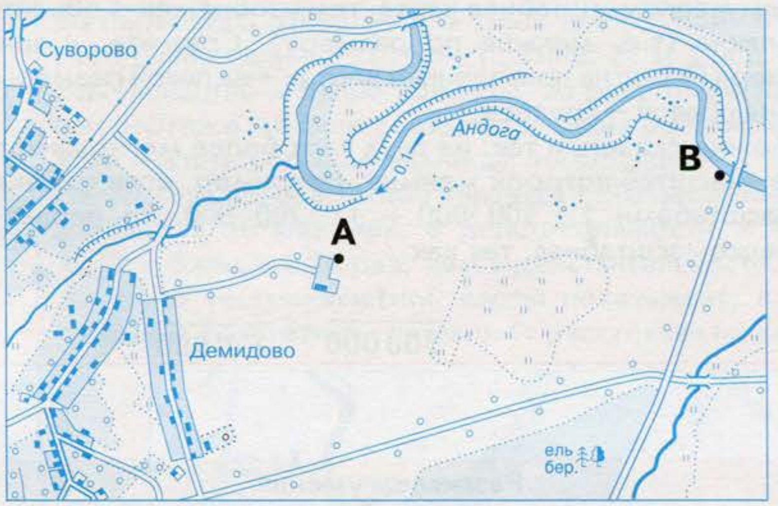
б) соответственные расстояния на двух различных картах?

2 Вы знаете, что масштаб принято записывать в виде такого отношения, один из членов которого равен единице. Что показывает второй член этого отношения?

3 а) На какой из карт уменьшение больше?
б) У какой из карт масштаб больше?
в) Какая из карт более крупномасштабная?
г) Во сколько раз уменьшение на одной из карт больше, чем на другой?



4 Проверьте, верны ли утверждения:
а) 1 см расстояния на карте равен 2 000 м на местности;
б) 1 см расстояния на карте равен 200 м на местности;
в) расстояние между точками A и B на местности равно 1 км.



М 1 : 20 000

5 Запишите отношение, которое показывает, какую часть первая величина составляет от второй. Помните, что обе величины следует выразить в тех единицах измерения, в каких выражена первая величина.
а) 1 см от 1 м; б) 1 см от 1 км; в) 1 см от 20 км; г) 1 см от 50 км; д) 1 см от 100 км.

6 Запишите масштаб карты, на котором расстояние 100 км изображено отрезком:
а) 1 см; б) 2 см; в) 5 см; г) 10 см.
На какой из этих карт самый мелкий масштаб (какая карта самая мелкомасштабная)? На какой – самый крупный (какая карта самая крупномасштабная)?

На какой из этих карт наиболее крупное изображение местности? наиболее мелкое?

7 Определите при помощи карты, чему равно расстояние между Степашево и Семигорьем, между Арменками и Пустошью, между Митино и Комсомольском.

М 1 : 1 000 000

8 Между Петровским и Ивантеевкой 5 км. Чему будет равно соответствующее расстояние на карте с масштабом 1 : 50 000?

9 Имеется две карты: с масштабами 1 : 50 000 и 1 : 200 000. Какая из них более крупномасштабная?

10 Каков масштаб изображённой карты, если известно, что от Казани до Ижевска 300 км?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

Отрезку на карте длиной 4 см соответствует расстояние на местности 200 км.

а) Каков масштаб карты?

б) Каково реальное расстояние между городами, если расстояние между ними на данной карте равно 1,5 см?

П **Вариант II.**

а) Определите при помощи карты, чему равно расстояние между Лунино и Чамзинкой.

б) Расстояние на местности между двумя населёнными пунктами, изображёнными на этой карте, составляет 100 км. Чему равно соответствующее расстояние на карте? Какие это населённые пункты?

М 1 : 1 000 000

Тренировочные упражнения.

Н

11 а) Рустам, познакомившись с понятием масштаба, выяснил, что масштаб одна стотысячная (1 : 100 000) означает, что 1 см на карте с таким масштабом соответствует 1 км в реальности. После этого, работая с географической картой, он стал рассуждать так: «Масштаб карты 1 : 10 000 000. Зачеркну во втором числе пять нулей и узнаю, сколько километров реального расстояния изображает 1 см на этой карте». Верны ли рассуждения Рустама? Обоснуйте свой ответ.

б) Сколько километров содержится в 1 см на карте с масштабом 1 : 500 000; 1 : 5 000 000?

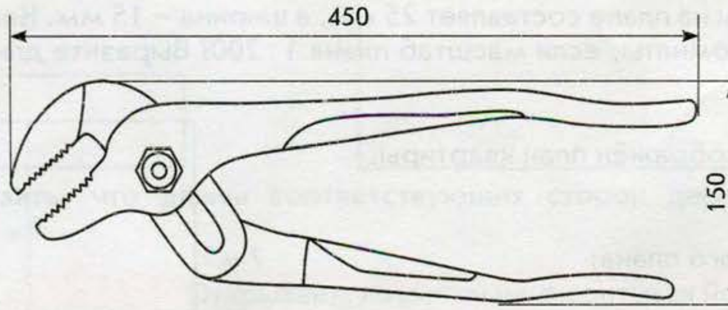
в) На карте с масштабом 1 : 1 000 000 расстояние между двумя городами равно 4,7 см. Чему равно это расстояние в реальности?

12 Отрезку на карте длиной 2,5 см соответствует расстояние на местности 12,5 км.
а) Каков масштаб этой карты?
б) Каково расстояние между двумя городами на местности, если на карте оно изображено отрезком длиной 5,1 см? Найдите ответ с помощью пропорции.

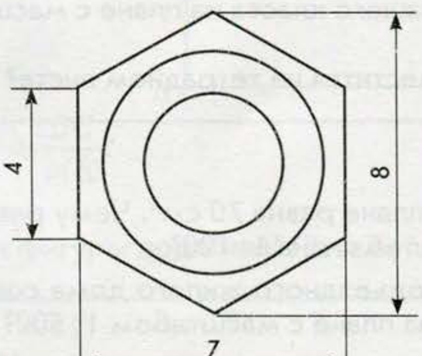
13 На карте, масштаб которой 1 : 10 000 000, расстояние от Воронежа до Саратова равно 4,7 см. Чему равно реальное расстояние между этими городами?

14 Получить уменьшенные или увеличенные изображения объектов можно с помощью фотографии.
Как вы думаете, увеличен или уменьшен предмет и во сколько раз, если он изображён на фотографии в масштабе:
а) 1 : 10; б) 10 : 1; в) 2 : 1; г)1 : 100?

15 На чертежах принято указывать реальные размеры предмета в миллиметрах. В каком масштабе выполнен чертёж разводного ключа?



16 На чертежах принято указывать реальные размеры предмета в миллиметрах. Определите масштаб чертежа гайки.



17 а) Длина детали на чертеже равна 50 мм, а в реальности – 25 см. Чему равен масштаб этого чертежа?

б) Длина детали на чертеже равна 50 мм, а в реальности – 2,5 см. Чему равен масштаб этого чертежа?

П

18 а) Длина детали на чертеже, сделанном в масштабе 1 : 5, равна 52 мм. Длина этой же детали на чертеже, сделанном в масштабе 1 : 10, будет больше или меньше? Во сколько раз?

б) Длина детали на чертеже, сделанном в масштабе 1 : 10, равна 52 мм. Каким будет масштаб чертежа, на котором изображение этой же детали будет крупнее в два раза? мельче в два раза?

М

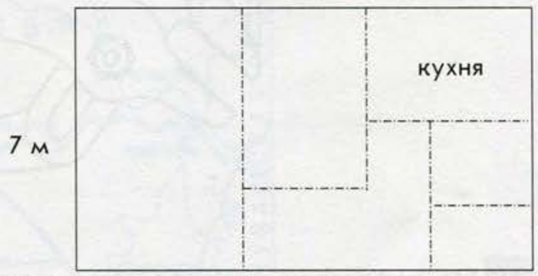
19 Длина детали на чертеже, сделанном в масштабе 1 : 5, равна 60 мм. Чему будет равна длина этой детали на чертеже, сделанном в масштабе: а) 1 : 3; б) 2 : 1; в) 1 : 10?

Н

20 Длина комнаты на плане составляет 25 мм, а ширина – 15 мм. Какие реальные размеры у этой комнаты, если масштаб плана 1 : 200? Выразите длину и ширину комнаты в метрах.

21 На рисунке изображён план квартиры.

Определите:
а) масштаб этого плана;
б) площадь этой квартиры;
в) площадь кухни.



П

22 Каковы будут размеры вашего класса на плане с масштабом:
а) 1 : 100; б) 1 : 5?
Какой из этих планов поместится на тетрадном листе?

М

23 а) Площадь квартиры на плане равна 70 см^2. Чему равна площадь этой квартиры в реальности, если масштаб плана 1 : 100?

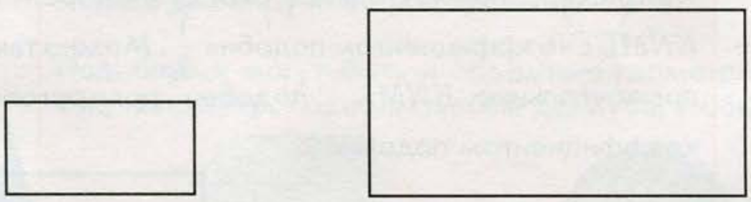
б) Площадь этажа одноподъездного жилого дома составляет 300 м^2. Чему равна площадь этого этажа на плане с масштабом 1 : 500?

в) Площадь детской площадки равна в реальности 120 м^2, а на плане – 30 см^2. Определите масштаб этого плана.

4.7 Пропорциональность в геометрии. Подобные фигуры

Вспоминаем то, что знаем

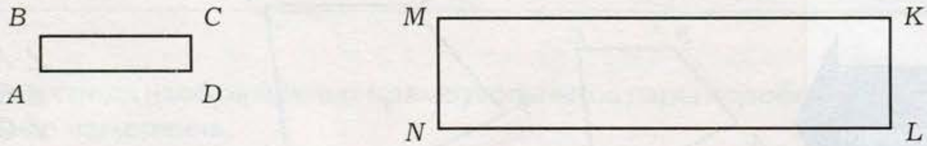
- На рисунке изображены фигуры, которые называются **подобными**. Что у них общего и чем они отличаются?



- Можно ли сказать, что длины соответствующих сторон данных фигур прямо пропорциональны?

Открываем новые знания

- Сравните длины соответственных сторон данных прямоугольников.



- Верна ли пропорция: $\dfrac{AB}{NM} = \dfrac{BC}{MK}$?
- Можно ли сказать, что эти фигуры **подобны**? Почему?

?!

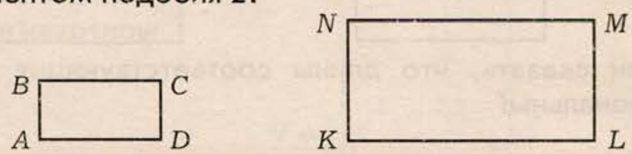
- Какие фигуры называют подобными?

Если рассматривать две карты одной и той же местности, выполненные в разном масштабе (как, например, на стр. 165), то каждой точке на одной карте соответствует точка на другой карте (обе эти точки являются изображениями одной и той же точки на местности). Если брать на каждой карте по паре соответствующих друг другу точек и измерять расстояния между ними, то окажется, что отношение этих расстояний – число постоянное. Говорят, что такие карты *подобны* друг другу.

Две геометрические фигуры называются **подобными**, если отношение расстояния между любыми двумя точками первой фигуры к расстоянию между соответственными точками другой фигуры постоянно (выражается одним и тем же числом). Это число называется **коэффициентом подобия**.

Можно сказать короче: две геометрические фигуры называются **подобными**, если их соответственные размеры *пропорциональны*.

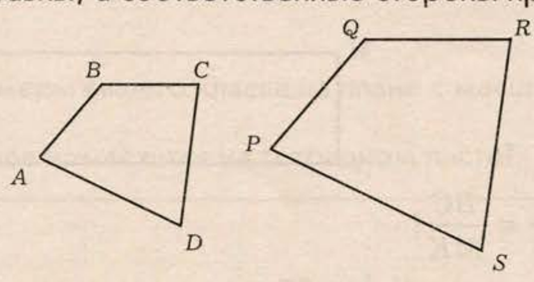
Например, прямоугольник $ABCD$ подобен прямоугольнику $KNML$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Можно также сказать, что прямоугольник $KNML$ подобен прямоугольнику $ABCD$ с коэффициентом подобия 2.



Установить подобие многих геометрических фигур можно гораздо проще, чем сказано выше.

Подобные многоугольники

Два многоугольника подобны, если их соответственные углы равны, а соответственные стороны пропорциональны.

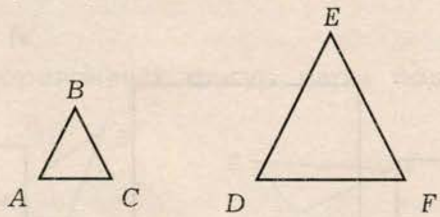


$\angle A = \angle P$
$\angle B = \angle Q$
$\angle C = \angle R$
$\angle D = \angle S$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$

Для установления подобия треугольников достаточно, чтобы выполнялось лишь одно из названных требований – или равенство углов, или пропорциональность сторон; второе при этом выполняется автоматически.

Два треугольника подобны, если их соответственные стороны пропорциональны.

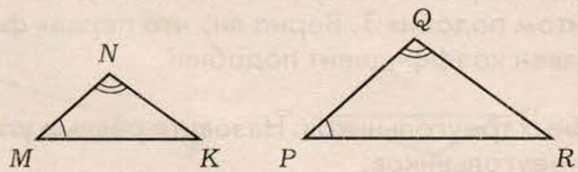


Треугольники ABC и DEF подобны, т.к.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

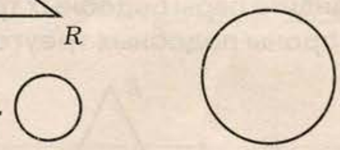
Два треугольника подобны, если их соответственные углы равны. При этом, поскольку сумма углов любого треугольника равна 180°, то достаточно равенства двух углов одного треугольника двум углам другого треугольника.

Подобие треугольников



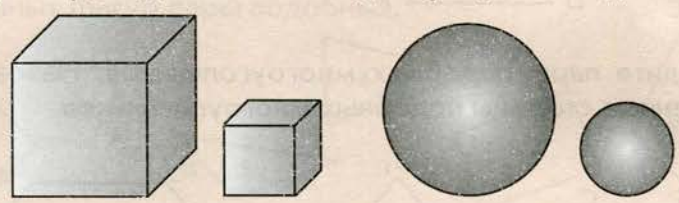
Треугольники MNK и PQR подобны, т.к. $\angle M = \angle P$; $\angle N = \angle Q$

Любые две окружности подобны.



Подобными могут быть и объёмные геометрические фигуры. Так, например, подобны любые два куба, любые два шара.

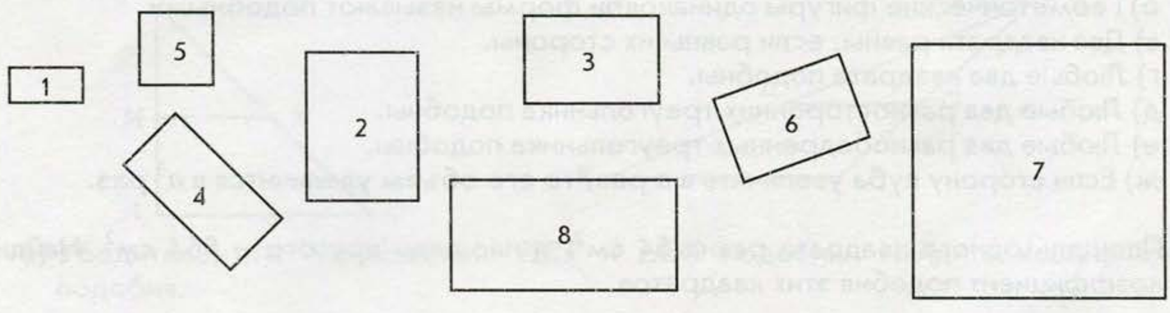
Подобие объёмных геометрических фигур



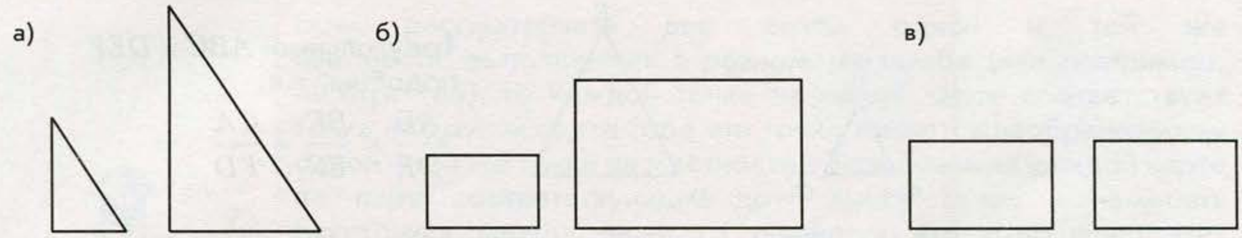
Развиваем умения

Н

1 Найдите среди изображённых прямоугольников пары подобных, выполнив необходимые измерения.



2 На рисунках изображены пары подобных фигур. Чему равен коэффициент подобия?

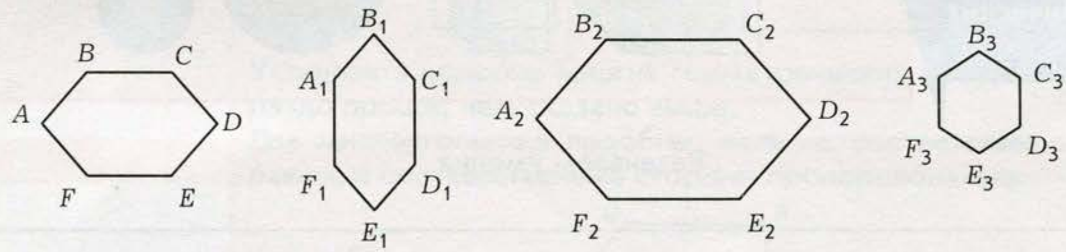


3 Первая фигура подобна второй с коэффициентом подобия 2. Верно ли, что вторая фигура подобна первой? Если да, то чему равен коэффициент подобия?

4 Первая фигура подобна второй с коэффициентом подобия 2, а вторая подобна третьей с коэффициентом подобия 3. Верно ли, что первая фигура подобна третьей? Если да, то чему равен коэффициент подобия?

5 а) Найдите пары подобных треугольников. Назовите равные углы и соответственные стороны подобных треугольников.

б) Найдите пары подобных многоугольников. Назовите равные углы и соответственные стороны подобных многоугольников.



6 Найдите истинные высказывания.

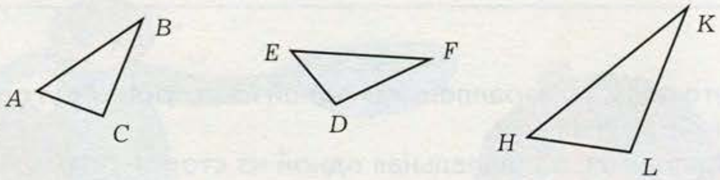
а) Геометрические фигуры, имеющие одинаковые формы и размеры, называют равными.
б) Геометрические фигуры одинаковой формы называют подобными.
в) Два квадрата равны, если равны их стороны.
г) Любые два квадрата подобны.
д) Любые два равносторонних треугольника подобны.
е) Любые два равнобедренных треугольника подобны.
ж) Если сторону куба увеличить в a раз, то его объём увеличится в a^3 раз.

7 Площадь одного квадрата равна 54 см^2, а площадь другого – 864 см^2. Найдите коэффициент подобия этих квадратов.

Задания для самостоятельной работы.

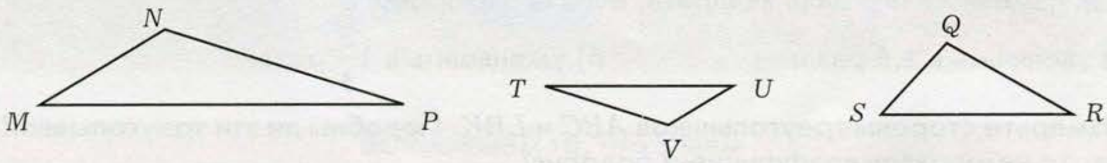
Н **Вариант I.**

Укажите среди изображённых фигур пары подобных и запишите коэффициент подобия.



П **Вариант II.**

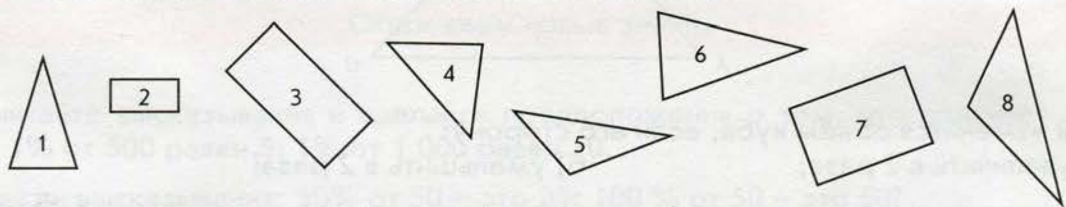
Укажите среди изображённых фигур пары подобных и запишите коэффициент подобия.



Тренировочные упражнения.

Н

8 Найдите среди изображённых фигур пары подобных.



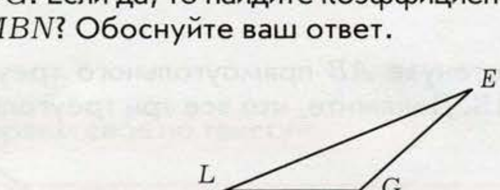
9 Стороны треугольника ABC равны 4 см, 8 см и 10 см.

а) Найдите стороны подобного ему треугольника KMN, если наименьшая сторона этого треугольника равна 2 см.

б) Найдите стороны треугольника LFG, подобного треугольнику ABC, если его наибольшая сторона равна 25 см.

в) Подобны ли треугольники KMN и LFG? Если да, то найдите коэффициент подобия.

10 а) Подобны ли треугольники ABC и MBN? Обоснуйте ваш ответ.



б) Убедитесь, что треугольники KEF и LEG подобны. Найдите коэффициент подобия.

П

11 Прямоугольник со сторонами 5 см и 8 см подобен прямоугольнику, одна из сторон которого равна 10 см. Чему может быть равна вторая сторона этого прямоугольника?

М

12 а) Докажите, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника, отсекает от него подобный треугольник.

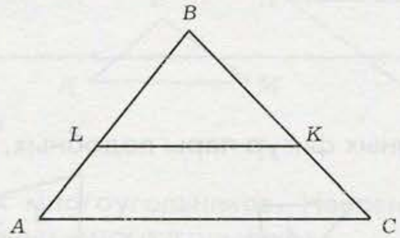
б) Верно ли, что прямая, параллельная одной из сторон прямоугольника, отсекает от него подобный прямоугольник?

Н

13 Как изменится площадь квадрата, если его сторону:

а) увеличить в 1,5 раза; б) уменьшить в $1\frac{2}{3}$ раза?

14 Измерьте стороны треугольников ABC и LBK. Подобны ли эти треугольники? Если да, то чему равен коэффициент подобия?



15 Как изменится объём куба, если его сторону:

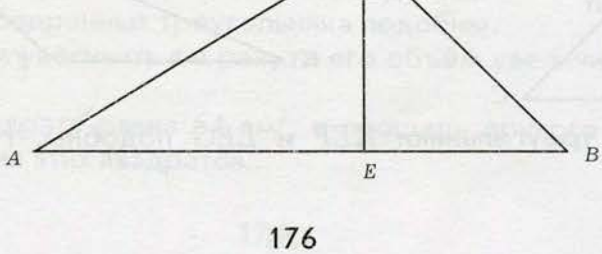
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 2 раза?

П

16 Коэффициент подобия двух квадратов равен 5. Как отличаются площади этих квадратов?

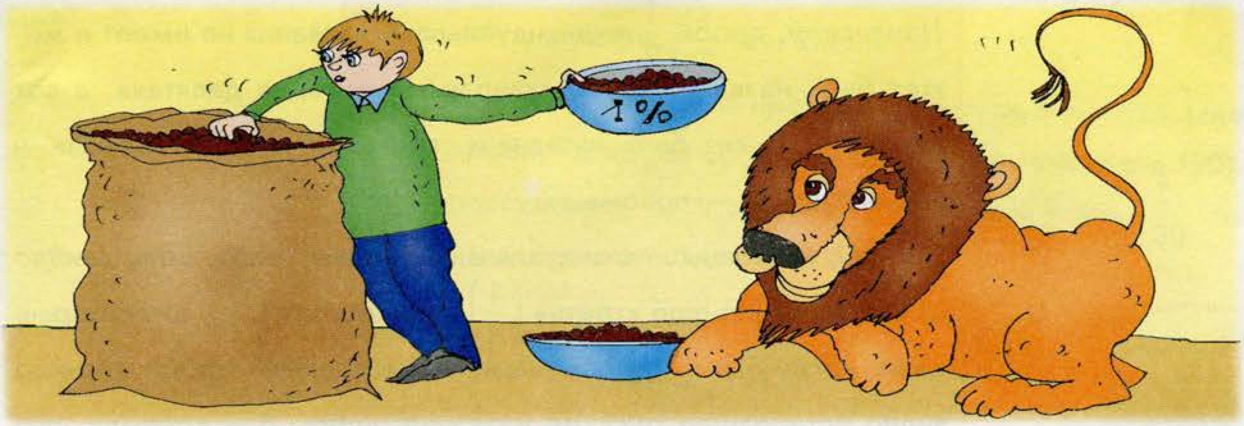
М

17 На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята такая точка E, что $CE \perp AB$. Докажите, что все три треугольника на рисунке подобны.



ПРОЦЕНТЫ

5.1 Понятие о процентах



Вспоминаем то, что знаем

- Найдите: а) 0,1 от 600; б) 0,01 от 500.
- Найдите: а) $\frac{1}{1\,000}$ от 7 500; б) $\frac{1}{100}$ от 8 000.

Открываем новые знания

- Прочитайте высказывания и сделайте предположения о том, что означает запись 1%: 1% от 500 равен 5; 1% от 1 000 равен 10.
- Верны ли высказывания: 50% от 50 – это 25; 100 % от 50 – это 50?

?!

- Знаете ли вы существительное для названия дроби $\frac{1}{2}$? а дроби $\frac{1}{3}$?
- Вспомните ещё несколько дробей, имеющих особые названия.
- Что означает слово «процент»?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Процентом от данного числа называется $\frac{1}{100}$ этого числа. Для обозначения процента используется знак %.
Вместо «процент от данного числа» можно говорить «процент данного числа».

Исторически сложилось так, что некоторые дроби с числителем 1 имеют, кроме общепринятого математического стандартного названия (оно выражается числительным), ещё и своё индивидуальное название (выражается существительным).

Например, дробь $\frac{1}{9}$ индивидуального названия не имеет и может быть названа только стандартно – «одна девятая», а вот дробь $\frac{1}{2}$ может быть названа и стандартно – «одна вторая», и индивидуально – «половина».

Дробей, имеющих индивидуальные названия, мало. Большинство из вас вспомнят ещё «треть» $\left(\frac{1}{3}\right)$ и «четверть» $\left(\frac{1}{4}\right)$, а некоторые даже «осьмушку» $\left(\frac{1}{8}\right)$. В названии последней дроби хорошо видно устаревшее русское название цифры 8 – «осемь», или «осмь». В старину индивидуальные названия имело большее количество дробей, чем сейчас. Более того, была даже некоторая система названий таких дробей.

В старых книгах, наряду с названием «треть», можно встретить названия «полтреть» $\left(\frac{1}{6}\right)$, т.е. половина от трети, «полполтреть» $\left(\frac{1}{12}\right)$, т.е. половина от полтрети, и т.д. Вместо современного «четверть» раньше говорили «четь» $\left(\frac{1}{4}\right)$ и соответственно «полчеть» $\left(\frac{1}{8}\right)$, т.е. половина от четверти, «полполчеть» $\left(\frac{1}{16}\right)$, т.е. половина от полчетверти, и т.д.

Индивидуальное название дроби $\frac{1}{10}$ (десятина) вы, наверное, слышали на уроках истории.

Из Западной Европы пришло название дроби $\frac{1}{12}$ (унция), которое сейчас почти не употребляется.

К числу индивидуальных названий дробей относится и слово «процент» для дроби $\frac{1}{100}$. Вы, вероятно, обратили внимание, что почти во всех индивидуальных названиях дробей присутствуют названия их знаменателей. Процент в этом отношении не является исключением – это слово в переводе с латыни значит «от сотни», «из сотни». Кстати, старое русское название процента – «отсоток».

Таким образом, проценты – это всего лишь специальные названия для некоторых дробей. Сказать «сорок три процента» всё равно что сказать «сорок три сотых». Написать 43% – то же самое, что написать $\frac{43}{100}$ или 0,43.

Следовательно, задачи на проценты, по сути, являются задачами на дроби, но дроби особого вида (со знаменателем 100).

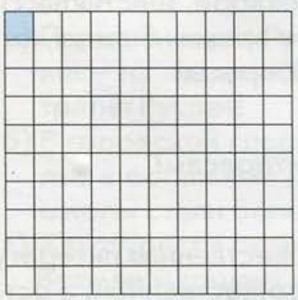
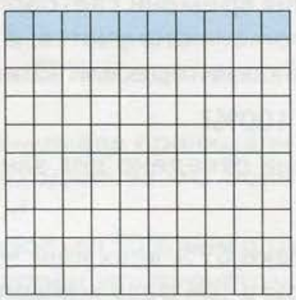
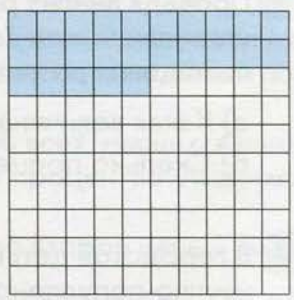
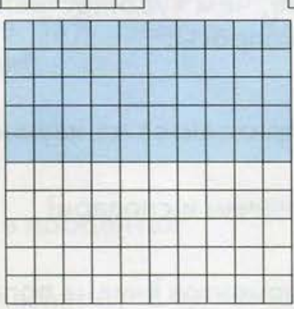
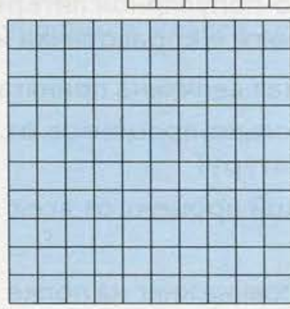
Часто рассуждают так: поскольку 1% от числа – это $\frac{1}{100}$ этого числа, то всё число содержит 100%.

Развиваем умения

Н

1 Квадраты на рисунках содержат по 100 клеток. Для каждого квадрата ответьте на вопросы:

а) Сколько сотых долей квадрата закрашено?
б) Сколько процентов площади квадрата составляет закрашенная часть?
в) Какую часть площади квадрата занимает закрашенная часть?
г) Сколько процентов площади квадрата составляет незакрашенная часть?
д) Какую часть площади квадрата занимает незакрашенная часть?

а)

б)

в)

г)

д)


2 Заполните таблицу до конца, используя в случае необходимости в качестве модели числа квадрат размером 10×10 клеток.

Сотая часть числа	1%
Десятая часть числа	10%
Пятая часть числа	
Четвёртая часть числа	
Половина числа	
Три четверти числа	

3 Выразите проценты обыкновенной несократимой дробью:

10%	15%	20%	25%	50%	75%	80%
$\frac{1}{10}$						

4 Выразите в процентах:

а) $\frac{3}{100}$; б) $\frac{18}{100}$; в) $\frac{69}{100}$.

5 Выразите проценты обыкновенными дробями и, если можно, сократите их:
а) 15%; б) 25%; в) 30%; г) 40%; д) 60%; е) 80%; ж) 55%; з) 49%.

6 Проведя анализ распределения времени светового дня в декабре, шестиклассники установили, что 75% этого времени они учатся, а остальное время используют для посещения различных занятий по интересам. Ответьте на вопросы:

а) Какая величина принята за 100%?

б) Сколько процентов времени отведено для занятий по интересам?

7 В городской детской библиотеке 69% всех книг – это художественная литература, научно-популярной литературы в три раза меньше, чем художественной, а остальные книги – справочники и словари. Ответьте на вопросы:

а) Какая величина принята за 100%?

б) Сколько процентов от всех книг библиотеки приходится на научно-популярную литературу?

в) Какой процент от всех книг составляют справочники и словари?

8 а) Половина книг на полке – учебники. Сколько процентов книг на полке составляют остальные книги?

б) Десятая часть всех украшений в шкатулке представлена кольцами. Какой процент составляют остальные украшения в шкатулке?

в) Четверть коллекции филателиста – это марки, выпущенные в России. Сколько процентов его коллекции составляют марки, выпущенные в других странах?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) Десятую часть всех найденных грибов составляют сыроежки. Сколько процентов приходится на остальные грибы?

б) Выразите в процентах: $\frac{12}{100}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$.

П Вариант II.

а) В блокноте Никиты 30% страниц занято планированием дел, 20% – телефонными номерами. Весь ли блокнот заполнен записями планов и номеров телефонов?

б) Начертите квадрат 10×10 клеток. Закрасьте 20% этого квадрата.

Тренировочные упражнения.

Н

9 Начертите круг и закрасьте: а) 25%; б) 50% ; в) 75% этого круга.

10 Начертите квадрат 10×10 клеток и закрасьте:
а) 22%; б) 26%; в) 78%; г) 100% этого квадрата.

11 а) Перед 8 марта Руслан 40% всех своих денег потратил на подарок маме, столько же – на подарок бабушке, а 20% – однокласснице Свете. Все ли свои деньги потратил Руслан?

б) В городской спортивной олимпиаде принимали участие 25% всех учащихся школы, а остальные ребята приходили за них болеть. Сколько процентов учащихся школы стали болельщиками?

в) Автотурист в первый день проехал 50% всего маршрута, а во второй день – 40%. Весь ли маршрут был преодолён автотуристом за два дня?

г) В классе 55% девочек. Какой процент от всех учащихся класса составляют мальчики?

П

12 Выразите в процентах:

а) $\frac{5}{10}$ от числа; б) $\frac{2}{5}$ от числа.

М

13 Шестиклассник Валя, начав изучать главу «Проценты» и прочитав параграф «Понятие о процентах», решил разработать новый раздел математики «Осьмушки». Он даже придумал специальный значок для обозначения осьмушек: #. Например, 3# обозначает 3 осьмушки.

а) Переведите осьмушки в проценты: 2#, 3#, 4#, 10#, 20,5#.

б) Переведите проценты в осьмушки: 50%, 125%, 62,5%, 20%, 21%.

Н

14 Что больше:

а) половина или 60% урожая;

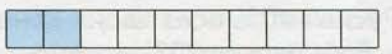
б) 20% или четверть всего населения города;

в) 40% или треть класса?

15 а) С контрольной работой справились 85% учащихся класса. Какая часть учащихся с ней не справилась?

б) В коллекции нумизмата английские монеты составляют 21% от общего числа монет, португальские монеты – 15%, китайские – 8%, а остальная часть его коллекции – это российские монеты. Какую часть коллекции составляют российские монеты?

16 Какая часть прямоугольника закрашена? Выразите эту часть в процентах.

а)  б)  в) 

П

17 Выразите в процентах $\frac{1}{3}$ от числа; $\frac{1}{6}$ от числа; $\frac{2}{3}$ от числа.

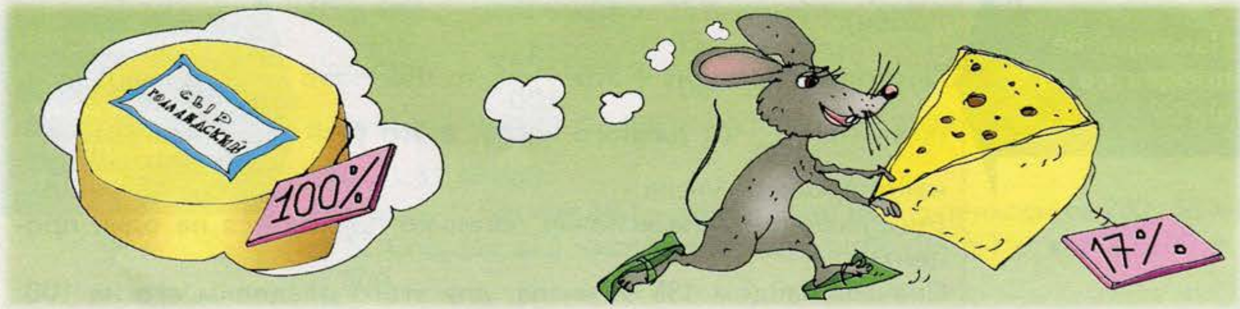
М

18 Переведите проценты в осьмушки*: 40%, 72%, 65%, 140%, 12,5%.

---

* См. задание 13.

5.2 Нахождение процентов от числа и числа по известному количеству процентов от него



Вспоминаем то, что знаем

- Решите задачи:

а) В школьную столовую привезли 450 кг картофеля. Для приготовления гарниров использовали $\frac{2}{5}$ всего картофеля. Сколько это килограммов?

б) В овощной магазин привезли 450 кг картофеля. Это $\frac{2}{5}$ всех овощей, которые есть в этом магазине. Какова масса всех овощей в магазине?

Открываем новые знания

- Решите задачи.
  - а) В школе 500 учащихся. В театральном кружке занимается 3% от всего этого количества. Сколько ребят посещает театральный кружок?
  - б) В школьной спортивной секции записано 60 ребят. Это 12% от всего количества учащихся в школе. Сколько ребят учится в школе?

?!

- Как решаются задачи на нахождение процентов от числа и числа по известному количеству процентов от него?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Нахождение процентов от числа и числа по известному количеству процентов от него – это две наиболее простые и в то же время наиболее распространённые задачи на проценты. Поскольку процент – это всего лишь особое название дроби $\frac{1}{100}$, то эти две задачи, по сути, являются задачами на дроби.

Нахождение процентов от числа

Первая опорная задача. Найти $n\%$ от данного числа.

При решении этой задачи можно рассуждать по-разному.

Рассуждение 1 (подход к задаче на проценты, как к задаче на дроби).

Поскольку процент – это $\frac{1}{100}$, то $n\%$ – это $\frac{n}{100}$. Значит, нужно найти $\frac{n}{100}$ от данного числа, а это уже известная задача – найти дробь от числа.

Рассуждение 2 (выяснение, сколько приходится на один процент).

Сначала найдём 1% от числа, для этого разделим его на 100. Затем для нахождения $n\%$ умножим полученную величину на n.

Рассуждение 3 (использование пропорции).

Число принимаем за 100%, а $n\%$ от него обозначаем какой-нибудь буквой, например x. После этого составляем пропорцию («числа под числами, проценты под процентами»), затем решаем её.

Рассмотрим применение всех этих рассуждений при решении конкретного примера.

Пример 1. Найти 42% от числа 180.

Решение 1. 42% – это $\frac{42}{100}$, или 0,42. Теперь умножим 180 на 0,42 и получим: $180 \cdot 0{,}42 = 75{,}6$.

Решение 2. Сначала найдём 1% $\left(\frac{1}{100}\right)$ от числа 180:

$180 : 100 = 1{,}8$. Теперь найдём 42% $\left(\frac{42}{100}\right)$, получим: $1{,}8 \cdot 42 = 75{,}6$.

Решение 3. Число 180 – это 100%. Необходимо найти 42% от этого числа. Обозначим эту величину x, тогда:

$$\begin{array}{l} \downarrow 180 - 100\% \downarrow \\ \;\; x \;\; - \;\; 42\% \end{array}$$

$$x = \frac{180 \cdot 42}{100} = \frac{756}{10} = 75{,}6.$$

Быстрее всего действовать по правилу: **чтобы найти n процентов от числа, нужно умножить это число на $\frac{n}{100}$.**

Замечание. Часто дробь $\frac{n}{100}$ удобно записать как десятичную (так мы поступали при решении примера 1). Но это возможно далеко не всегда, например, если нужно найти от числа $12\frac{3}{7}\%$ или же $x\%$.

Нахождение числа по известному количеству процентов от него

Вторая опорная задача. Найти число, если известно $n\%$ от него. Рассуждать можно такими же тремя способами, как при решении первой задачи.

Пример 2. Найти число, 35% которого равно 280.

Решение 1. 35% – это $\frac{35}{100}$, или 0,35, и чтобы найти число по известной дроби от него, нужно число разделить на дробь: $280 : 0{,}35 = 800$.

Решение 2. Так как 280 – это 35%, то на 1% приходится $280 : 35 = 8$. Отсюда всё число (составляющее 100%) – это $8 \cdot 100 = 800$.

Решение 3. Обозначим искомое число через x и составим пропорцию.

$$\begin{array}{l} x \ - 100\% \\ 280 - 35\% \end{array}$$

$$x = \frac{280 \cdot 100}{35} = 800.$$

Быстрее всего действовать по правилу: **чтобы найти число, n процентов от которого равно данному числу, нужно разделить данное число на $\frac{n}{100}$.**

Заметим, что вторую опорную задачу можно свести к первой. При решении примера 2 можно рассуждать так. Пусть неизвестное число x. Найдём 35% от него, получим $0{,}35x$, что по условию равно 280, т.е. $0{,}35x = 280$. Отсюда $x = 280 : 0{,}35$, или $x = 800$.

Развиваем умения

Н

1 а) Автотурист за 3 дня проехал 1 500 км. В первый день он проехал 35% всего пути, во второй день – 40%, а в третий – остальной путь.

Ответьте на вопросы:

– Какая величина здесь принята за 100% и известна ли она?
– Можно ли определить, чему равен 1%, и как это сделать?
– Сколько километров проехал автотурист в первый день?
– Сколько километров проехал автотурист во второй день?
– Сколько километров проехал автотурист в третий день?

б) Автотурист был в пути 3 дня. В первый день он проехал 630 км, что составляет 35% всего пути, во второй – 40%, а в третий – остальной путь.

Ответьте на вопросы:
– Какая величина здесь принята за 100% и известна ли она?
– Можно ли определить, чему равен 1%, и как это сделать?
– Сколько километров проехал автотурист в первый день?
– Сколько километров проехал автотурист во второй день?
– Сколько километров проехал автотурист в третий день?

2 Найдите:

а) 1% от 250; г) 1% от 25; ж) 1% от 2;
б) 2% от 250; д) 10% от 250; з) 50% от 225;
в) 1,5% от 250; е) 0,5% от 250; и) $30\frac{1}{3}$ % от 225.

3 Найдите число, если:

а) 1% от него равен 5; г) 2% от него равны 50; ж) 1,5% от него равны 0,9;
б) 1% от него равен 25; д) 10% от него равны 200; з) 0,5% от него равны 2,5;
в) 1% от него равен 0,5; е) 50% от него равны 250; и) $35\frac{5}{7}$ % от него равны 70.

4 а) В школе 1 200 учащихся, 8% от этого количества занимаются в математических кружках. Сколько учащихся этой школы занимаются в математических кружках?

б) В коллекции 180 старинных испанских монет. Это 5% всей коллекции. Сколько всего монет в коллекции?

в) В городской спартакиаде принимали участие 180 учеников из школ Зареченского района. Это 3% всех учащихся района. Сколько учеников в Зареченском районе?

г) Длина дороги от города до посёлка Таёжный 150 км. После зимы 25% этой дороги требуется ремонт. Сколько километров дороги нужно отремонтировать?

5 а) На приобретение оборудования химической лаборатории выделили 108 тыс. рублей. Это 60% стоимости необходимого оборудования. Сколько денег нужно добавить на покупку оборудования?

б) В коробке шоколадного ассорти́ 30 конфет. Конфеты с ореховой начинкой составляют 20% всех конфет, с фруктовой начинкой – 50% , а остальные – с пралине́. Сколько конфет каждого вида в этой коробке?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) В математических классах школы учится 240 учащихся, 80% от этого количества – мальчики. Сколько мальчиков учится в математических классах этой школы?

б) На полке 18 журналов. Это 9% всех журналов, которые есть в библиотеке. Сколько всего журналов в библиотеке?

П Вариант II.

а) Автотурист проехал за 2 дня 1 440 км. В первый день он проехал 55% всего пути, а остальную часть – во второй день. Сколько километров проехал турист во второй день?

б) Туристы прошли до первого привала 16 км, что составляет 20% всего пути. Сколько километров им осталось пройти?

Тренировочные упражнения.

Н

6 а) Денис прочитал книгу в 240 страниц за 3 дня. В первый день – 30% всей книги, во второй – 45%, а остальную часть – в третий день. Сколько страниц прочитывал Денис в каждый из трёх дней?

б) Аня прочитала книгу за 4 дня. В первый день – 52 страницы, что составило 13% всей книги, во второй – 26% всей книги, а в третий и четвёртый дни – оставшуюся часть. Сколько страниц прочитала Аня за третий и четвёртый дни?

в) Масса сушёных грибов составляет 14% массы свежих. Сколько сушёных грибов можно получить из 0,5 центнера свежих? Сколько свежих грибов надо взять, чтобы получить 0,28 центнера сушёных?

П

7 а) Во сколько раз увеличится стоимость товара, если она вырастет на 100%, 30%, 150%?

б) Во сколько раз уменьшится стоимость товара, если его уценят на 20%, 50%, 90%?

8 На овощной базе находится 0,5 т фруктов. Яблоки составляют 40% всех фруктов, причём 50% из них – антоновка. Сколько килограммов антоновки на этой базе?

9 Выберите верные ответы. Замените неверные ответы верными:

а) 4 десятины составляют 40% всего количества; б) 4 осьмушки составляют 50% всего количества; в) 3 унции – это 36% всего количества.

М

10 Для приготовления мази требуется 3 унции от четверти объёма розового масла. Сколько процентов объёма розового масла требуется для приготовления этой мази?

11 Как вы помните, шестиклассник Валя разрабатывает новый раздел математики «Осьмушки». Он даже придумал специальный значок для обозначения осьмушек: #.

а) Найдите 3# от числа 112.

б) Найдите число, 5# от которого равно 70.

в) Закончите предложение: «Чтобы найти n# от данного числа, нужно...»

Н

12 а) Банк начисляет на вклад ежегодно 12%. Сколько денег будет на счету через год, если в начале года было вложено 6 000 р.?

б) Костюм, цена которого 2 500 р., уценили на 15%. Чему равна новая цена?

в) Машинистка должна была перепечатать 250 страниц рукописи, но перепечатала на 20% меньше. Сколько страниц перепечатала машинистка?

г) Себестоимость товара составляет 500 р. Расходы на его перевозку и хранение составляют 15% от себестоимости. Какова должна быть цена товара, если она складывается из себестоимости и указанных расходов?

П

13 Общая площадь прогулочных площадок детского сада равна 200 $м^2$. Из них 20% отведено для младшей группы, а остальная часть разделена в отношении 3 : 2 между средней и старшей группами детского сада. Сколько квадратных метров площадки отведено для каждой группы?

М

14 В селе Весёловке 480 жителей. Из них 60 – младше 8 лет. Какой процент от общего числа жителей Весёловки составляют дети младше 8 лет?

5.3 Процентное отношение двух чисел

Вспоминаем то, что знаем

- Какую часть число 60 составляет от числа 480? Запишите ответ в виде обыкновенной дроби и в виде десятичной.
- Что показывает выражение 30 : 180?

Открываем новые знания

- Найдите отношение чисел 5 и 20 и выразите его в процентах.

?!

- Как выразить в процентах отношение двух чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Третья опорная задача. Сколько процентов одно число составляет от другого?

Можно решать эту задачу, сводя её к известной задаче на дроби. Сначала выясним, какую часть одно число составляет от другого, для чего разделим первое число на второе. Но так как требуется выразить полученное частное в процентах, то есть в сотых долях, то умножим его на 100.

Сколько процентов одно число составляет от другого

Чтобы узнать, сколько процентов составляет первое число от второго числа, нужно разделить первое число на второе и затем умножить на 100.

Пример. Сколько процентов составляет число 54 от числа 180?

По сформулированному правилу получим $\frac{\cancel{54}^{3}}{\cancel{180}_{1}} \cdot 10\cancel{0} = 30$.

Замечание 1. Можно рассуждать и так. Найдём отношение 54 к 180. Получим $\frac{54}{180}$. Попробуем перейти к десятичным дробям: $54 : 180 = 0{,}3$. От этой десятичной дроби можно перейти к процентам: 0,3 – это 0,30, а следовательно – 30%.

Замечание 2. Чтобы перейти от десятичной дроби к процентам, нужно эту десятичную дробь умножить на 100.

Замечание 3. Поскольку при решении третьей опорной задачи мы сначала находим отношение чисел, а затем выражаем его в процентах, эта задача часто называется задачей на процентное отношение двух чисел.

Многие ребята предпочитают сводить третью опорную задачу к первой опорной задаче.

При решении рассмотренного примера они рассуждают так. Пусть число 54 составляет x% от числа 180. Это значит, что x% от числа 180 равно 54. Но x% от числа 180 равно $180 \cdot \frac{x}{100}$. Таким образом, $180 \cdot \frac{x}{100} = 54$, или $\frac{180}{100} \cdot x = 54$, откуда $x = 30$.

Ответ: 30%.

Развиваем умения

Н

1 Выразите в процентах:

а) 0,25 массы товара; б) 0,03 массы товара; в) 0,5 массы товара; г) 1,2 массы товара; г) 0,8 массы товара; д) 3,6 массы товара.

2 Выразите дроби в процентах:

а) в тексте $\frac{7}{10}$ всех заданий составляют задачи на проценты;

б) $\frac{3}{5}$ всех жителей посёлка старше 18 лет;

в) водой заполнили $\frac{17}{20}$ бочки;

г) $\frac{14}{25}$ всех овощей в рагу составляет картофель.

3 Каждый участник математической олимпиады получил 10 заданий. Определите, какую часть составляет число заданий, выполненных названными ниже участниками, от числа всех заданий, и выразите эту часть в процентах:

а) Анна выполнила 4 задания;

б) Расул выполнил 5 заданий;

в) Олег выполнил 8 заданий.

4 а) Из 600 участников радиовикторины верно ответили на вопрос 150 человек. Каков процент верно ответивших на вопрос викторины? Сколько процентов ответили неверно?

б) В посёлке 1 200 жителей, из них 900 человек работают в рыбацкой артели. Сколько процентов жителей работают в этой артели, а сколько – нет?

в) Посадили 200 семян огурцов, 100 из них проросло. Каков процент проросших семян?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

Баскетбольная команда забросила в кольцо противника 48 мячей. Определите, какую часть составляет число попаданий, сделанных названными ниже игроками команды, от числа всех попаданий, и выразите эту часть в процентах:

а) Сергей забросил 12 мячей; б) Илья забросил 18 мячей.

П **Вариант II.**

В посёлке было 1 200 жителей. В течение года их число увеличилось на 6 человек. На сколько процентов увеличилось число жителей посёлка?

Тренировочные упражнения.

Н

5 а) Костюм стоил 2 000 р. В конце лета его цена понизилась на 600 р. На сколько процентов понизилась цена костюма?

б) Стоимость проезда в автобусе повысилась на 3 р. На сколько процентов повысилась стоимость проезда в автобусе, если до повышения билет стоил 15 р.?

в) Контрольную работу по математике писали 150 шестиклассников: 18 из них получили «5»; 66 человек – «4»; 63 получили «3», а остальные ученики – «2». Вычислите, сколько процентов учащихся выполнили работу на каждую из отметок.

6 Выразите десятичную дробь приближённо в процентах, предварительно округлив её до сотых:

а) 0,925; б) 0,409; в) 0,5777; г) 0,1391; д) 0,0438.

П

7 Замените обыкновенную дробь приближённо десятичной дробью с двумя знаками после запятой. Найдите, сколько примерно процентов составляют:

а) $\frac{1}{3}$ объёма бака машины; г) $\frac{1}{11}$ бюджета предприятия;

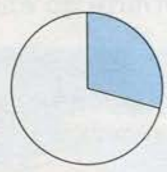
б) $\frac{1}{6}$ площади стены; д) $\frac{1}{23}$ денежного вклада;

в) $\frac{1}{15}$ населения города; е) $\frac{1}{9}$ всех учащихся школы.

8 Определите, какой примерно процент площади фигуры составляет закрашенная часть:

а) 40%; б) 60%; в) 90%.

а) 20%; б) 30%; в) 50%.



М

9 Банк начисляет на вклад ежегодно 8%. Сколько денег будет на счету через 2 года, если была вложена сумма 20 000 р.?

10 Как вы помните, шестиклассник Валя разрабатывает новый раздел математики «Осьмушки». Он даже придумал специальный значок для обозначения осьмушек: #.

а) Сколько осьмушек составляет число 3 от числа 40; число 488 от числа 128?

б) В посёлке было 1 200 жителей. В течение года их число увеличилось на 6 человек. На сколько осьмушек увеличилось число жителей посёлка?

в) Закончите предложение: «Чтобы узнать, сколько осьмушек составляет первое число от второго числа, нужно...»

Н

11 а) Диван до распродажи стоил 18 000 р. Во время распродажи его цена была снижена на 5 400 р. На сколько процентов была снижена цена дивана?

б) Диван, цена которого до распродажи составляла 15 000 р., уценили на 15%. Чему равна новая цена?

в) В городе 30 000 избирателей. В голосовании приняли участие 12 000 человек. Какой процент избирателей участвовал в голосовании?

12 В заводской столовой за неделю было израсходовано 2 ц овощей. Используя диаграмму, дайте ответы на вопросы:

а) Сколько процентов составила свёкла?

б) Сколько килограммов овощей каждого вида было израсходовано?

П

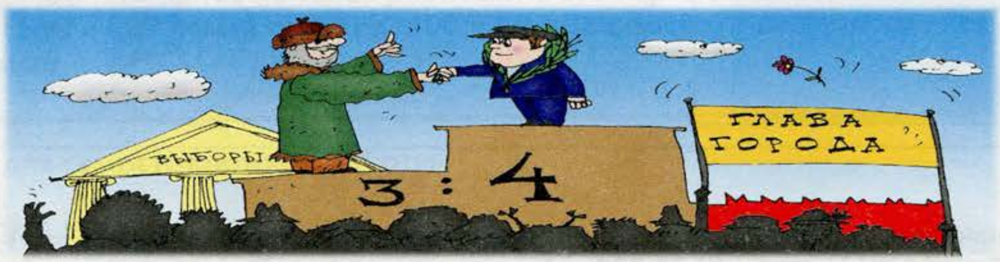
13 В домашней библиотеке есть художественные книги и научные. Число художественных книг относится к числу научных, как 3 : 2.

а) Какую часть от всего числа книг составляют художественные? Выразите эту часть в процентах.

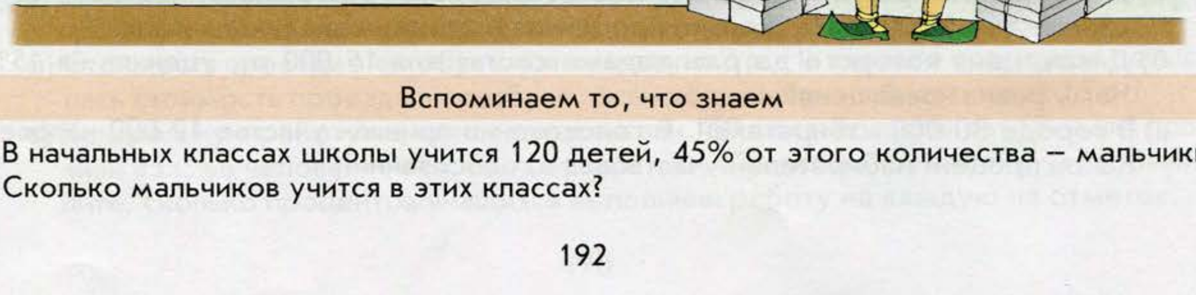
б) Какую часть от всего числа книг составляют научные? Выразите эту часть в процентах.

М

14 Во время выборов городского головы голоса избирателей распределились между двумя кандидатами в отношении 3 : 4. Сколько примерно процентов избирателей проголосовали за победителя? Сколько отдали свои голоса за проигравшего? (Ответ округлите до единиц.)



5.4 Увеличение и уменьшение числа на данное количество процентов



Вспоминаем то, что знаем

- В начальных классах школы учится 120 детей, 45% от этого количества – мальчики. Сколько мальчиков учится в этих классах?

Открываем новые знания

- В прошлом году в начальных классах школы училось 120 детей, в этом году их количество увеличилось на 45%. Сколько детей в этом году учится в начальных классах?
- В прошлом году центр творчества посещали 120 детей, в этом году их количество уменьшилось на 45%. Сколько детей в этом году посещает центр творчества?

?!

- Как решаются задачи, в которых надо увеличить данное число на n%? уменьшить данное число на n%?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Как увеличить и как уменьшить число на $n\%$

В новостях часто сообщают, на сколько процентов увеличилась или уменьшилась какая-то величина.

Например: дневная выручка магазина увеличилась на 15%, производство товара за месяц увеличилось на 10%, потребление электроэнергии уменьшилось на 3%, население города за год увеличилось на 8% и т.д.

Четвёртая опорная задача. Увеличить данное число на n%.

Пятая опорная задача. Уменьшить данное число на n%.

Решение каждой из этих опорных задач можно получить за два шага, используя первую опорную задачу.

Первый шаг: найти n процентов от данного числа.

Второй шаг: прибавить то, что получилось, к данному числу (или вычесть из него).

Однако когда некоторая величина увеличивается или уменьшается несколько раз подряд (скажем, мы интересуемся населением страны на начало каждого из пяти последовательных лет), то даже два шага – слишком громоздко, поэтому следует научиться делать это быстрее.

Проделаем это для четвёртой опорной задачи. Пусть x – данное число.

Первый шаг: n процентов от числа x – это $x \cdot \frac{n}{100}$.

Второй шаг: прибавляем $x \cdot \frac{n}{100}$ к данному числу x:

Увеличение числа на $n\%$

$$x + x \cdot \frac{n}{100} = x \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) = x \cdot \frac{100 + n}{100}.$$

Таким образом, мы установили следующее правило:

Увеличить число на n процентов — всё равно что умножить его на $\frac{100 + n}{100}$.

Уменьшение числа на $n\%$

Аналогично устанавливается правило:

Уменьшить число на n процентов — всё равно что умножить его на $\frac{100-n}{100}$.

Увеличить число можно на любое число процентов, а уменьшить — только на число процентов, меньшее 100.

Пример 1. Число умножили на $\frac{131}{100}$. На сколько процентов увеличили число?

Известно, что увеличить число на x процентов — это умножить его на $\frac{100+x}{100}$, значит, $100 + x = 131$, т.е. число увеличили на 31%.

Иногда встречаются задачи, в которых говорится о нескольких последовательных увеличениях или уменьшениях.

Пример 2. Зарплата была повышена на 10%, а затем ещё на 20%. На сколько процентов повысилась первоначальная зарплата?

Решение. Пусть первоначальная зарплата была x р. После первого повышения она умножилась на $\frac{110}{100}$, т.е. стала равной $1{,}1x$, а после второго — умножилась на $\frac{120}{100}$, т.е. стала равной $1{,}1x \cdot 1{,}2$, или $1{,}32x$. Таким образом, после двух увеличений зарплата умножилась на 1,32, т.е. повысилась на 32%.

Пример 3. После увеличения длины и ширины прямоугольника его площадь увеличилась на 65%. На сколько процентов была увеличена длина, если ширина была увеличена на 10%?

Решение. Предположим, что длина была увеличена на $x\%$. Ширина была умножена на $\frac{110}{100}$, а длина умножена на $\frac{100+x}{100}$, т.е. площадь оказалась умноженной на $\frac{110}{100} \cdot \frac{100+x}{100}$. Но с другой стороны, так как площадь по условию увеличилась на 65%, то она умножилась на $\frac{165}{100}$. Отсюда получаем, что

$$\frac{110}{100} \cdot \frac{100+x}{100} = \frac{165}{100};\ \frac{100+x}{100} = \frac{165}{110};\ \frac{100+x}{100} = \frac{3}{2};\ x = 50\%.$$

Н

1 а) Число умножили на 1,25. На сколько процентов увеличили число?
б) Число умножили на 0,9. На сколько процентов уменьшили число?

2 Имеет ли смысл высказывание: производство товара уменьшили на 120%?

3 а) Число увеличили в 2,5 раза. На сколько процентов увеличили число?
б) Число увеличили на 200%. Во сколько раз увеличили число?
в) Число уменьшили в 2,5 раза. На сколько процентов уменьшили число?
г) Число уменьшили на 20%. Во сколько раз уменьшили число?

4 а) Число умножили на 1,2, а потом ещё на 1,5. Увеличили или уменьшили число? На сколько процентов?
б) Число умножили на 0,2, а потом ещё на 0,5. Увеличили или уменьшили число? На сколько процентов?

5 а) Костюм стоил 2 500 р. Во время распродажи его цена была уменьшена на 16%. Найдите новую цену этого костюма.
б) При покупке плаща со скидкой 10% за него заплатили 5 400 р. Какова была первоначальная цена плаща?
в) Во время распродажи цены на один и тот же товар в одном магазине были снижены на 30%, а в другом – в 1,4 раза. В каком магазине стало выгоднее покупать этот товар, если до снижения цен он стоил в обоих магазинах одинаково?
г) Во время распродажи цена на один и тот же товар была снижена сначала на 15%, а потом ещё на 20%. На сколько процентов была снижена первоначальная цена?

6 а) В городе A проживало 36 500 человек. После строительства в этом городе нефтеперерабатывающего комбината его население увеличилось на 20%. Сколько стало жителей в городе A?
б) Количество ребят, занимающихся в спортивных секциях города, по сравнению с прошлым годом увеличилось на 25%. Сколько человек занималось в спортивных секциях в прошлом году, если в этом году их стало 600?

7 а) Выпуск продукции швейной фабрики увеличился в четыре раза. На сколько процентов увеличился выпуск продукции?
б) Потери рабочего времени уменьшились в четыре раза. На сколько процентов уменьшились эти потери?

Задания для самостоятельной работы.

Н **Вариант I.**

а) Товар стоил 2 000 р. Во время распродажи его цена была уменьшена на 20%. Какова новая цена этого товара?

б) Выпуск товара по сравнению с прошлым годом увеличился на 25%. Во сколько раз увеличился выпуск товара по сравнению с прошлым годом?

П **Вариант II.**

а) Число увеличили в три раза. На сколько процентов его увеличили?
б) Число уменьшили на 80%. Во сколько раз его уменьшили?

Тренировочные упражнения.

Н

8 а) В прошлом году городской центр творчества посещали 2 500 человек. В этом году это количество увеличилось на 4%. Сколько людей посещают городской центр творчества в этом году?

б) Производство каждого наименования продукции молокозавода по сравнению с прошлым месяцем увеличилось на 10%. Сколько бутылок молока произвёл завод в прошлом месяце, если в этом месяце их было выпущено 3 300?

в) Количество первоклассников в школе после её реконструкции увеличилось в 1,2 раза. На сколько процентов увеличилось количество первоклассников?

г) После реконструкции школы площадь пришкольного участка уменьшили в 1,25 раза. На сколько процентов уменьшили его площадь?

9 В марте прибыль составляла 120 000 р., в апреле она увеличилась на 5%, а в мае уменьшилась на 2% по сравнению с апрелем. Какова прибыль в мае?

П

10 а) Число a увеличили на b процентов. Сколько получилось?
б) Число a уменьшили на b процентов. Сколько получилось?

11 Числитель дроби увеличили на 50%, а знаменатель – на 20%. Увеличилась или уменьшилась дробь? На сколько процентов?

М

12 Длину прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить его ширину, чтобы площадь осталась неизменной?

13 На заводе два цеха, причём во втором цехе работает в 1,5 раза больше сотрудников, чем в первом. После реконструкции завода количество сотрудников первого цеха увеличилось на 10%, а второго – уменьшилось на 14%. Увеличилось или уменьшилось общее количество сотрудников и на сколько процентов?

Н

14 а) Выразите проценты десятичными дробями:

15%; 25%; 30%; 40%; 60%; 80%; 55%; 49%.

б) Выразите в процентах: 0,45 объёма; 0,01 объёма; 0,4 объёма; 1,2 объёма.

15 Выразите дроби в процентах:

а) в контрольной $\frac{6}{10}$ всех заданий относятся к обязательному уровню сложности;

б) $\frac{1}{2}$ всех участников спортивного соревнования младше 14 лет;

в) картофель составляет $\frac{9}{20}$ всего количества овощей в магазине;

г) банку заполнили соком на $\frac{7}{25}$ всего объёма.

16 а) Учебники составляют 30% всей учебной литературы, выпускаемой издательством. Сколько процентов приходится на остальную учебную литературу этого издательства?

б) Пятая часть всех участников соревнований – легкоатлеты. Какой процент составляют остальные участники соревнований?

в) Товар до распродажи стоил 15 000 р. Во время распродажи его цена была снижена на 600 р. На сколько процентов была снижена цена товара?

г) Товар, цена которого до распродажи была 5 000 р., уценили на 5%. Чему равна новая цена?

д) В понедельник цена акции составляла 2 000 р., в среду она уменьшилась на 5%, а в пятницу она уменьшилась на 10% по сравнению со средой. Какой была цена акции в пятницу?

П

17 Число увеличили на 20%, затем то, что получилось, уменьшили на 20%. Как в результате изменилось первоначальное число: увеличилось, уменьшилось или осталось прежним? Если увеличилось или уменьшилось, то на сколько процентов?

18 Филиал молочного завода производит только кефир и простоквашу, причём кефир составляет 40% от всей продукции. За месяц производство кефира увеличилось на 20%, а производство простокваши уменьшилось на 20%. Сколько теперь процентов от всей продукции составляет кефир?

М

19 Как вы помните, шестиклассник Валя разрабатывает новый раздел математики «Осьмушки». Он даже придумал специальный значок для обозначения осьмушек: #.

а) Число увеличили на 3,5#. Во сколько раз увеличили число?

б) Число уменьшили на 3#, а затем ещё на 3#. На сколько осьмушек в результате уменьшилось первоначальное число?

в) Закончите предложение: «Увеличить число на n# – всё равно что умножить его на ...»

г) Закончите предложение: «Уменьшить число на n# – всё равно что умножить его на...»

20 Ваня и Варя взяли одно и то же число, не равное нулю. Ваня сначала увеличил его на $n\%$, а затем то, что получилось, увеличил на $m\%$. Варя поступила наоборот: сначала увеличила число на $m\%$, а затем то, что получилось, увеличила на $n\%$. У кого из ребят в результате получилось большее число? Как зависит ответ от m и n?

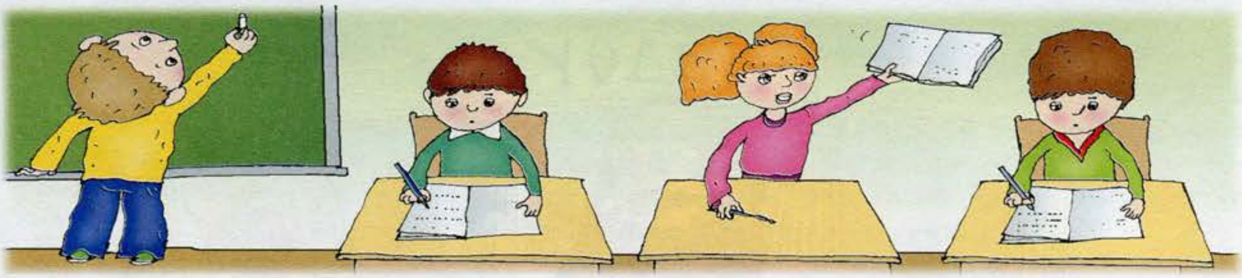
21 Объёмы ежегодной добычи нефти из первой, второй и третьей скважин относятся, как 7 : 6 : 5. Планируется уменьшить годовую добычу из первой скважины на 4%, а из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объём добываемой за год нефти не изменился?

22 Брюки на 40% дороже рубашки, но на 20% дешевле пиджака. На сколько процентов пиджак дороже рубашки?

23 Доход семьи состоит из зарплаты мужа и зарплаты жены. Если бы зарплата мужа увеличилась в 2 раза, а зарплата жены осталась бы прежней, то доход семьи возрос бы на 60%. На сколько процентов возрос бы доход семьи, если бы в 2 раза увеличилась зарплата жены, а зарплата мужа осталась бы прежней?

24 В прошлом году первый завод выпускал продукции на 20% больше, чем второй. За год выпуск продукции на первом заводе вырос на 15%, а на втором – на 25%. На сколько процентов теперь больше продукции выпускает первый завод, чем второй?

Итоговый тест



1 Для пропорции $\frac{a}{x} = \frac{s}{q}$ записано основное свойство пропорции. Выберите верную запись:
а) $as = xq$;   б) $sq = xa$;   в) $xs = qa$.

1 очко

2 Найдите неизвестный член пропорции $15 : x = 27 : 18$.
Ответы: а) 32,4;   б) 22,5;   в) 10.

1 очко

3 Число 98 разделили в отношении 3 : 4. Меньшая часть равна:
а) 35;   б) 36;   в) 42.

2 очка

4 Найдите 34% от числа 17,3.
Ответы: а) 58,82;   б) 5,882;   в) 0,5882.

1 очко

5 В нашей стране налог от любого дохода составляет 13%. Бизнесмен Иванов заплатил 52 000 р. подоходного налога. Доход бизнесмена Иванова составлял:
а) 58 760 р.;   б) 400 000 р.;   в) 452 000 р.

1 очко

6 На распродаже компьютер был куплен со скидкой 15% за 17 000 р. Компьютер первоначально стоил:
а) 17 015 р.;   б) 19 550 р.;   в) 20 000 р.

2 очка

7 Первая машинистка, работая одна, перепечатывает рукопись объёмом 240 страниц за 7 дней, а вторая эту же рукопись перепечатывает за 5 дней. Рукопись разделили между ними таким образом, чтобы они закончили работу одновременно. Первая машинистка получила:
а) 100 страниц;   б) 140 страниц;   в) 160 страниц.

2 очка

8 Число уменьшили в 1,6 раза. На сколько процентов уменьшили число?
Ответы: а) 16%;   б) 37,5%;   в) 60%.

3 очка

9 Число увеличили на 30%, а затем то, что получилось, увеличили ещё на 30%. В результате первоначальное число увеличилось на:
а) 60%;   б) 69%   в) 90%.

3 очка

Исторические страницы

Общую теорию отношений создал выдающийся древнегреческий математик Евд окс (V в. до н.э.). Она опиралась на разработанную им общую теорию величин, позволяющую с единой точки зрения рассматривать самые различные величины. Основные положения теории величин Евдокса следующие:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то и суммы будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то и разности будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

При построении теории отношений добавляется ещё одно положение:

6. Величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.

Теория отношений Евдокса намного опередила своё время глубиной понимания вопроса.

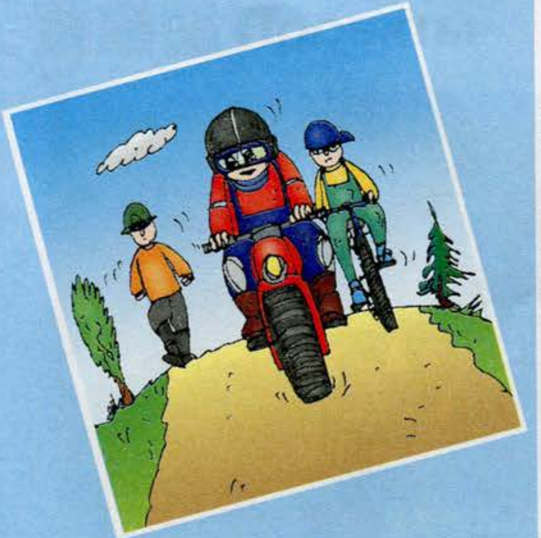
Чёткая трактовка числа как отношения присутствует во «Всеобщей арифметике» Ньютона (1707 г.): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине, принятой нами за единицу».

Задачи на пропорции люди решали с давних времён. Они встречаются ещё на клинописных табличках древних вавилонян.

Первая энциклопедия математических знаний Древнего Китая «Математика в девяти книгах» (II в. до н.э.) содержит подробное изложение методов решения задач на пропорции и пропорциональное деление. Так, в книге 2 «Соотношение между различными видами зерновых культур» решаются задачи на пропорции, в книге 3 «Деление по ступеням» – задачи на деление числа в данном отношении, прямую и обратную пропорциональные зависимости, а в книге 6 «Пропорциональное распределение» – более сложные задачи на пропорции.

Понятие процента возникло из практики займа денежных средств за вознаграждение пропорционально занятой сумме. При возврате долга бралась определённая плата с каждой занятой сотни денежных единиц. Само слово «процент» в переводе с латыни значит «от сотни». Существовали специальные таблицы расчёта процентов при длительном сроке пользования займом. Первую из таких таблиц составил уже упоминавшийся первооткрыватель десятичных дробей в Европе голландец Стéвин.

Любителям математики



1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе с постоянными скоростями в одном направлении. В какой-то момент мотоциклист оказался в 100 м сзади велосипедиста и в 400 м сзади пешехода. Через 6 мин мотоциклист обогнал велосипедиста и ещё через 6 мин обогнал пешехода. Через какое время после этого велосипедист обгонит пешехода?

2. На столе лежали конфеты. Первый мальчик взял 10% всех конфет. Второй взял 10% того, что осталось, и ещё 10% того, что взял первый. Третий взял 10% того, что осталось, и ещё 10% того, что взяли первые двое. Четвёртый взял 10% того, что осталось, и ещё 10% того, что взяли первые трое. Так продолжалось до тех пор, пока конфеты не закончились. Сколько было мальчиков и кому из них досталось больше всего конфет?

3. – Я задумала такое число,– сказала Варя,– что если к нему прибавить сумму его цифр, то получится 2 000.
– А я задумал такое число,– сказал Вася,– что если из него вычесть сумму его цифр, то получится 2 000.
– Этого не может быть,– возразила Варя. Какое число задумала Варя и почему она так ответила Васе?

4. Отец и сын катаются на коньках по круговой дорожке. Время от времени отец обгоняет сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее сына?

5. Имеется таблица 3×3 клетки. В клетках записаны все натуральные числа от 1 до 8 и ещё число x так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Найдите число x.

6. Три трёхзначных числа, в записи которых использованы все цифры, кроме нуля, дают в сумме 1 665. В каждом числе поменяли местами первую и последнюю цифры и получили три новых трёхзначных числа. Чему равна сумма полученных чисел?

Жизненная задача

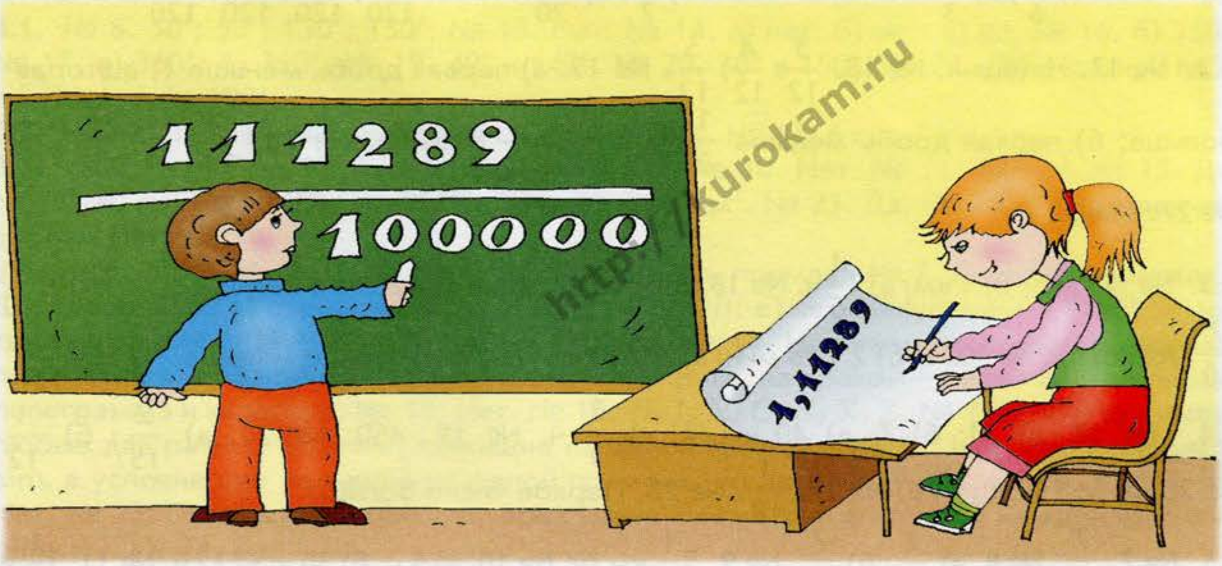
СИТУАЦИЯ. Выбор банка для оптимального вклада.

ВАША РОЛЬ. Казначей фонда спортивной секции.

ОПИСАНИЕ. Для спортивной секции строится новое здание, которое будет готово через год. Имеющиеся в фонде секции деньги нужно вложить на этот год в банк. В городе есть три банка: Бета-банк, Гамма-банк и Дельта-банк. Бета-банк выплачивает 6% каждые полгода, Гамма-банк – 4% каждые четыре месяца, а Дельта-банк – 3% каждые три месяца.

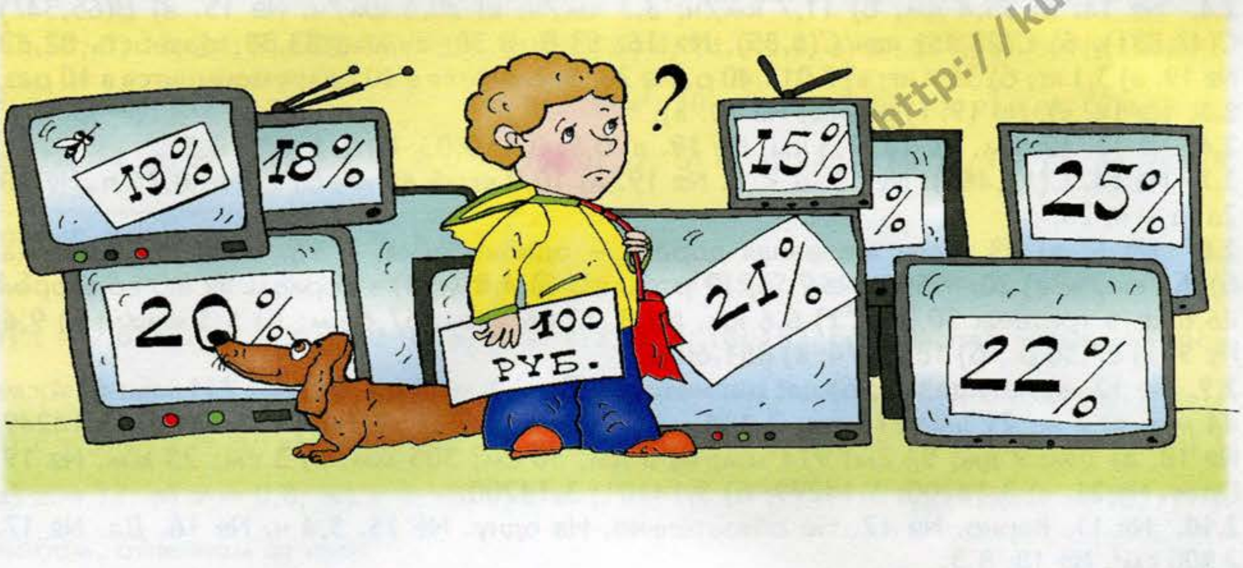
ЗАДАНИЕ. Выберите банк, в который выгоднее вложить деньги сроком на 12 месяцев, и рассчитайте, на сколько процентов выгоднее по сравнению с другими двумя банками.

Проекты



1. Вы знаете, что десятичные дроби более удобны для выполнения большинства арифметических операций, чем обыкновенные. Как вы считаете, почему они были придуманы позже, чем обыкновенные? Проанализируйте разные точки зрения, найдя их в различных источниках информации. Сравните их, сопоставьте со своими размышлениями на эту тему, подготовьте компьютерную презентацию.

2. Изучите условия потребительского кредитования на конкретную интересующую вас покупку (компьютер, телевизор и т.д.) в нескольких банках вашего города или региона и обоснованно выберите наиболее выгодный. При необходимости составьте таблицы, диаграммы, доклад, реферат.



Ответы

1.1. № 16. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$. № 17. 6. № 21. а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{3}{20}$. № 22. $\frac{20}{120}$; $\frac{25}{120}$; $\frac{10}{120}$; $\frac{76}{120}$. № 23. 10.

1.2. № 17. Наташин. № 18. $\frac{3}{12}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{5}{12}$. № 19. а) первая дробь меньше 1, а вторая – больше; б) первая дробь меньше $\frac{1}{2}$, а вторая – больше. № 26. $\frac{5}{12}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{17}{48}$ и др. № 27. Маша.

1.3. № 17. а) 5; б) 1 км; в) $1\frac{1}{5}$ ч. № 18. Второе и третье слагаемые больше $\frac{1}{12}$. № 19. $\frac{6}{10}$; $\frac{7}{10}$. № 28. а) 7 кг 300 г; б) 2 ч 28 мин; в) 3 ц 10 кг. № 29. а) первое меньше. № 30. $\frac{11}{12}$.

1.4. № 18. а) 14; б) 7; в) 40 км/ч; г) $\frac{2}{3}$ ч. № 19. 450. № 20. а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{1}{12}$. № 26. а) 6; 15; 30; б) 6. № 27. $\frac{1}{18}$. № 28. Первое число больше.

1.5. № 7. $\frac{7}{15}$. № 8. а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{7}{12}$. № 9. $5\frac{1}{2}$ км/ч. № 10. а) 5 ч; б) 30 ч; в) 12 ч. № 11. $1\frac{1}{2}$ ч. № 12. 20 ч. № 13. а) $\frac{7}{24}$; б) $\frac{1}{4}$ кг и $\frac{1}{2}$ кг. № 14. 15. № 15. 1 ч 25 мин. № 16. 1 ч.

2.1. № 13. а) 4 м 5 дм; б) 7 м 8 дм; в) 3 дм. № 14. 0,12; 0,21; 1,02; 1,20; 2,01; 2,10; 10,2; 12,0; 20,1, 21,0. № 18. C, D, M. № 20. а) 5,6 м; б) 7,54 м; в) 9,05 м; г) 11,67 ц; д) 12,06 ц; е) 3,05 р.

2.2. № 9. 288 мм^2. № 10. Урожайность первого участка больше. № 11. 0,0023 м; 5 040 м. № 13. а) 450; б) 30. № 14. 0,475 м; 1,221 м; 0,309 м. № 15. 0,036 м^2; 4 500 м^2.

2.3. № 13. Указания: а) $0,5 = \frac{1}{2}$; б) $0,25 = \frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$, а $\frac{1}{5} = 0,2$. № 18. а) 0; 1; б) 9; в) 8; 9. № 20. а) числа равны; б) получившееся число больше.

2.4. № 14. а) 55,4 дм; б) 11,7 км/ч; 3,3 км/ч; в) 20,5 км/ч. № 15. а) B(65,347); C(47,881); б) C(28,75) или C(5,85). № 16. 83,0; 0,38; сумма 83,38; разность 82,62. № 19. а) 3,1 кг; б) 36,4 кг; в) 7 013,40 р. № 20. Увеличится в 10 раз; уменьшится в 10 раз.

2.5. № 14. в). № 19. г) равны. № 20. а).

2.6. № 12. 12,5 м. № 14. 7,3 км. № 19. а) 0,8; 0,1; 0,03; б) 0,4; 0,2; 0,5.

2.7. № 14. C(12,465). № 15. $a < b$. № 19. а) 10,9 кг; 5,45 кг; б) 1,5 л; 0,75 л. № 20. $2a$; $a + b$; $2b$.

2.8. № 5. а) 48, если железная дорога – одноколейка, и 96, если двухколейка; б) 4,5 км/ч; в) 20; 1 500. № 7. а) 19 р. 30 к.; б) 4,8 м; в) в первом 52 кг, во втором 46,6 кг, в третьем 50,3 кг; г) 6,6 км. № 8. а) 86,4 км; 57,6 км; б) 5,5 км/ч; в) 9,6. № 9. а) 87,50 р.; б) 18 км/ч; в) 851,60 р.

2.9. № 12. а) нет; да; да; б) да; да; нет. № 13. а) 1 м; 7 дм; 71 см; 711 мм; б) 4 см; 44 мм; в) 2 м; 21 дм; 213 см; 2 134 мм; г) 1 км; 1 067 м. № 14. 3,14150; 3,14249. № 18. а) 1 м; 9 дм; 91 см; 914 мм; б) 3 дм; 30 см; 305 мм; в) 3 см; 25 мм. № 19. Прав. № 21. а) 3,14200; 3,14299; б) 3,14101; 3,14200.

2.10. № 11. Верно. № 12. Не обязательно. На одну. № 15. 5,4 ч. № 16. Да. № 17. 2 800 см^2. № 18. 8,3.

2.11. № 9. а) 0,2; б) 0,2; в) 0,18; г) 0,2; д) 0,08; е) 0,06. № 10. а) $1\frac{1}{6}$ ч; б) 2,75 ч; в) $\frac{1}{3}$ ч; г) $1\frac{2}{3}$ ч. № 12. а) 0,5 ч; б) $\frac{1}{60}$ ч; в) 0,1 ч; г) 0,25 ч. № 13. б).

3.1. № 8. 50°; 50°; 130°; 130°. № 13. Нет. № 14. а) нет; б) нет; в) да. № 16. б) 360°. № 17. а) 360°; б) 360°. № 19. 40° и 140°. № 20. 30° и 150°. № 23. Либо равны, либо дают в сумме 180°.

3.2. № 12. Либо равны, либо дают в сумме 180°. № 17. 6 см; 2 см.

3.3. № 7. 9 м; 3 м. № 8. 4 м; 2 м. № 9. Да. № 10. Нет. № 11. 48 см^2. № 15. Да. № 17. 40 м^2. № 18. Да. № 19. Нет. № 20. 280 мм^2. № 23. Да. № 24. С проведением высоты BM нет.

3.4. № 5. Ж, И, Н, О, Ф, Х. № 6. Да. (Например, прямая). № 7. Да. № 8. а) точка C; б) отрезок CD; в) отрезок DF; г) ΔCDO; д) ΔEOB; е) четырёхугольник $CDFE$; ж) четырёхугольник $BOFA$. № 12. Да. № 13. Нет. № 14. На левом чертеже это прямая, проходящая через центры прямоугольника и круга, на правом – через центры параллелограмма и квадрата. № 15. Нет. № 16. H, I, N, O, S, X, Z. № 17. Да. (Например, любые два равных отрезка, лежащие на одной прямой.) № 18. Нет. (Но если добавить в условие «не лежащие на одной прямой», то да.) № 19. Да. № 20. Да. № 21. Нет. № 23. Прямая, проходящая через центр симметрии фигуры (у каждой из фигур он есть). № 24. Да.

4.1. № 14. а) на каждые три решённые задачи приходится четыре нерешённые; б) каждый пятый бросок по воротам приводил к пропущенной шайбе. № 15. а) 4,5 км/ч; б) 0,075 км/мин; в) 4 500 м/ч; г) 75 м/мин; д) 1,25 м/с. № 16. Вторую единицу, измеренную с помощью первой. № 18. Время, затрачиваемое на преодоление единицы расстояния. Измеряется в часах на километр, секундах на метр и т.д. – можно писать по аналогии со скоростью ч/км, с/м. № 22. а) $\frac{3}{5}$; б) 3 : 5; в) 0,6. № 23. а) 56 км 250 м; б) 50 км; в) 62,5 км; г) 168 км 750 м. № 24. а) 1,5 ч; б) $\frac{1}{3}$ ч; в) 0,1 ч; г) 0,6 ч. № 25. 1 ч 20 мин.

4.2. № 5. а) 40; 80; б) 40; 80; в) 45; 75. № 6. а) 28; 20; б) 3,5; 2,5. № 7. а) 10; 20; 30; 40; 50; б) 17; 34; 51; 68; 85. № 8. а) 2; 7; б) 4; 14. № 9. а) 3 : 2; б) 2 : 5. № 10. а) 5 : 9; б) $\frac{4}{9}$. № 11. $\frac{am}{m+n}$; $\frac{an}{m+n}$. № 12. 10 м^2; 30 м^2; 35 м^2. № 13. а) и д); б) и в); г) и е). № 14. а) 27 м^2; б) 9,72 м^2. № 15. а) 12; б) 6; в) 24; г) на 12. № 17. 44. № 18. $\frac{am}{m+n+k}$; $\frac{an}{m+n+k}$; $\frac{ak}{m+n+k}$.

4.3. № 7. а) $x = 2$; б) $x = 84$; в) $x = 2{,}42$; г) $x = 0{,}972$. № 8. а) $x = 3\frac{3}{7}$; б) $x = 22\frac{1}{7}$; в) $x = 2{,}625$; г) $x = 0{,}5$. № 10. а) 2; 8; 128; б) 2; 18; 162. Если числа в начальной тройке различны, то можно подобрать три числа. № 12. а) да; б) нет; в) нет. № 13. а) $x = 3$; б) $x = 20$; в) $x = 5$; г) $x = 0{,}6$. № 14. а) $x = 6$; б) $x = \frac{2}{3}$; в) $x = 12$; г) $x = 1{,}5$; д) $x = 12$; е) $x = 0{,}8$; ж) $x = 10$; з) $x = 2$. № 15. а) 12; б) ни при каком; в) 16; г) при любом, отличном от нуля.

4.4. № 8. а) 30; б) 40 мин. № 10. а) 1 080 р.; 1 620 р.; б) 2 ч; 3 ч. № 12. Например, длина стороны треугольника и его периметр, при условии, что две другие стороны постоянны. № 13. а) 4; б) 110,25; в) 10 т; г) 3. № 14. 14 км/ч; 4 км/ч. № 15. 120.
4.5. № 6. а) 750 км; б) Маше 24 звезды, Кате – 36; в) 3 см. № 8. 30; 20; 12. № 9. а) 54; 36; б) старшему 625 р., младшему – 375 р.; в) 4. № 10. а) 16; б) 1,5. № 11. а) в 9 раз; б) 4 : 3.
4.6. № 9. Первая. № 11. а) верны; б) 5; 50; в) 47 км. № 12. а) 1 : 500 000; б) 25,5 км. № 13. 470 км. № 14. а) уменьшен в 10 раз; б) увеличен в 10 раз; в) увеличен в 2 раза; г) уменьшен в 100 раз. № 15. 1 : 5. № 16. 5 : 1. № 17. а) 1 : 5; б) 2 : 1. № 18. а) меньше в 2 раза; б) 1 : 5; 1 : 20. № 19. а) 10 см; б) 60 см; в) 3 см. № 20. 5 м; 3 м. № 21. а) 1 : 200; б) 84 $м^2$; в) 12 $м^2$. № 23. а) 70 $м^2$; б) 12 $см^2$; в) 1 : 200.
4.7. № 8. 1 и 6; 2 и 3; 5 и 8. № 9. а) 2 см; 4 см; 5 см; б) 10 см; 20 см; 25 см; в) да; $\frac{1}{5}$. № 10. а) да; б) $\frac{3}{5}$. № 11. 16 см, или 6,25 см. № 12. б) нет. № 13. $\frac{5}{8}$. № 14. а) увеличится в 2,25 раза; б) уменьшится в $2\frac{7}{9}$ раза. № 15. а) увеличится в 8 раз; б) уменьшится в 8 раз. № 16. В 25 раз.
5.1. № 11. а) все; б) 75%; в) нет; г) 35%. № 12. а) 50%; б) 40%. № 13. а) 25%; 37,5%; 50%; 125%; 256,25%; б) 4#; 10#; 5#; 1,6#; 1,68#. № 14. а) 60%; б) четверть; в) 40%. № 15. а) 15%; б) 56%. № 16. а) $\frac{1}{8}$, или 12,5%; б) $\frac{2}{10}$, или 20%; в) $\frac{1}{5}$, или 20%. № 17. а) $33\frac{1}{3}$%; б) $16\frac{2}{3}$%; в) $66\frac{2}{3}$%. № 18. 3,2#; 5,76#; 5,2#; 11,2#; 1#.
5.2. № 6. а) 72; 108; 60; б) 244; в) 7 кг; 2 ц. № 7. а) в 2 раза; в 1,3 раза; в 2,5 раза; б) в 1,25 раза; в 2 раза; в 10 раз. № 8. 100 кг. № 9. а) верно; б) верно; в) неверно; 3 унции – это 25%. № 10. 6,25%. № 11. а) 42; б) 112; в) умножить это число на $\frac{n}{8}$. № 12. а) 6 720 р.; б) 2 125 р.; в) 200; г) 575 р. № 13. Для младшей 40 $м^2$; для средней 96 $м^2$; для старшей 64 $м^2$. № 14. 12,5%.
5.3. № 5. а) 30%; б) 20%; в) на «5» – 12%; на «4» – 44%; на «3» – 42%; на «2» – 2%. № 6. а) 93%; б) 41%; в) 58%; г) 14%; д) 4%. № 7. а) 0,33, или 33%; б) 0,17, или 17%; в) 0,07, или 7%; г) 0,09, или 9%; д) 0,04, или 4%; е) 0,11, или 11%. № 8. в); б). № 9. 23 328 р. № 10. а) 0,6#; 30,5#; б) на 0,04#; в) разделить первое число на второе и затем умножить на 8. № 11. а) на 30%; б) 12 750 р.; в) 40%. № 12. а) 15%; б) картофеля 60 кг; капусты 50 кг; моркови 40 кг; свёклы 30 кг; лука 20 кг. № 13. а) $\frac{3}{5}$, или 60%; б) $\frac{2}{5}$, или 40%. № 14. ≈ 57%; ≈ 43%.
5.4. № 8. а) 2 600; б) 3 000; в) на 20; г) на 20. № 9. 123 480 р. № 10. а) $\frac{a(100+b)}{100}$; б) $\frac{a(100-b)}{100}$. № 11. Увеличилась на 25%. № 12. На 20. № 13. Уменьшилось на 4,4%. № 16. а) 70%; б) 80%; в) на 4%; г) 4 750 р.; д) 1 710 р. № 17. Уменьшилось на 4%. № 18. 50%. № 20. Одинаковые. № 21. На 8%. № 22. На 75%. № 23. На 40%. № 24. На 10,4%.

Содержание

Козлова Светлана Александровна, **Рубин** Александр Григорьевич

Математика
Учебник для 6-го класса
Часть 1

Концепция художественного редактирования – *Е.Д. Ковалевская*

Подписано в печать 06.09.12. Формат 84x108/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Гарнитура Журнальная. Объём 13 п.л. Тираж 11 000 экз. Заказ № 32977 (L-Sm).

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс».
109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс».
Телефоны для справок: (495) 368-70-54, 672-23-12, 672-23-34
http://www.school2100.ru E-mail: balass.izd@mtu-net.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат»
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1

9 785859 398768

УМК
Образовательной системы
«Школа 2100»

обеспечивает образовательный результат в соответствии с ФГОС через методический аппарат и систему заданий по формированию универсальных учебных действий

Это позволит каждому научиться

Решать разные возникающие в жизни задачи.
Главное не знания, а умение ими пользоваться!
Самостоятельно открывать новое.
Не надо зубрить и всегда искать готовые ответы!
Выбирать главное и интересное.
Не всё, что есть в учебнике, надо запомнить или выполнить!

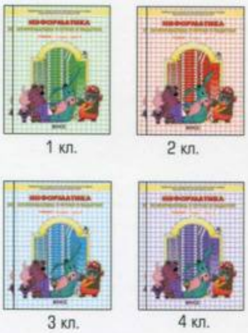
КОМПЛЕКСНЫЙ КУРС «МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

КУРС «МАТЕМАТИКА»
(авт. Т.Е. Демидова, С.А. Козлова, А.П. Тонких, А.Г. Рубин и др.)

1 кл. 2 кл. 3 кл. 4 кл.

Методические рекомендации для учителя по комплексному курсу
«МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»
(авт. С.А. Козлова, А.Г. Рубин, А.В. Горячев)

КУРС «ИНФОРМАТИКА»
(авт. А.В. Горячев и др.)



1 кл. 2 кл. 3 кл. 4 кл.